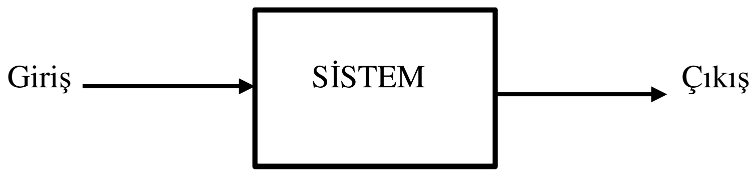
SİSTEMLER

Sistem teori, bir fenomen deyim olarak, disiplinler arası ilişkilerin bilimsel yaklaşımlarla incelendiği bir teoridir. Bunun için ilişkinin varlığı veya derecesi, ilgili olduğu sosyal ve fen alanlarına uygun matematiksel veya sosyal tabanlı modeller ve çerçeveler geliştirilerek araştırılmakta ve sonuçları üretilmektedir. Bu teori *1936 da biolog Ludwig von Bertalanffy* tarafından ilk olarak geliştirilmiştir. Bertalanffy teoriyi disiplinler arasında var olan ilişkinin araştırılması ihtiyacından geliştirmiştir.

Sistem Üzerine

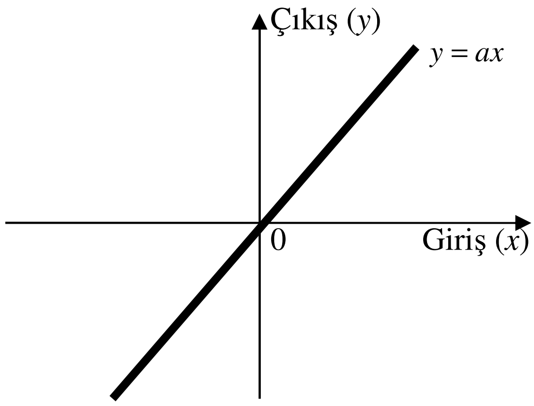


Şekil 1 Sistem görünümü

Sistemlerin Sınıflandırılması

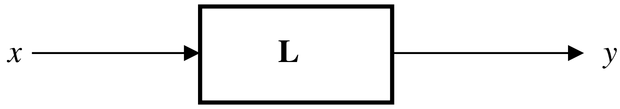
1. Deterministik sistemler
2. Stokastik sistemler
3. Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler
4. Analog ve dijital sistemler
5. Invertible/terslenebilir sistemler
6. Lineer ve Lineer olmayan sistemler
7. Bellekli (dinamik) ve belleksiz (anlık, instantaneous) sistemler
8. Causal (nedensel) ve causal olmayan (noncausal) sistemler
9. Zamandan bağımsız ve bağımlı sistemler
10. Kontrol Sistemleri , kontrol edilebilir – Gözlenebilir Sistemler

Lineer Sistemler



Şekil 8.Lineer Model

$y(t) = ax(t)$



Şekil 9. Sistem

$x(t)$ giriş ve $y(t)$ çıkış ve **L** lineer operatör olmak üzere sistem giriş ve çıkışları aşağıdaki gibi olsun.

$x_1(t)$ için $y_1(t)$
$x_2(t)$ için $y_2(t)$

$x_1(t) + x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$ **toplamsallık**

$x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) + \cdots + y_n(t)$

$c_1 x_1(t)$ için $c_1 y_1(t)$ **çarpımsallık**

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ **süperpozisyon**

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) + \cdots + c_n x_n(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + \cdots + c_n y_n(t)$

Örnek

Sistem girişi $x(t)$ ve çıkışı $y(t)$ olarak verilen $y(t) = 5x(t)$ sisteminin lineerliğini araştırın.

Çözüm

Buna göre eğer sistemin lineerliği araştırılacaksa

$x_1(t)$ girişi için sistem çıkışı $y_1(t) = 5x_1(t)$
$x_2(t)$ girişi için sistem çıkışı $y_2(t) = 5x_2(t)$

Şimdi sistem girişlerini $c_1 = 3$ ve $c_2 = 4$ katsayılarıyla ağırlıklandırılam.

$3x_1(t)$ girişi için sistem çıkışı $3y_1(t) = 3(5x_1(t)) = 15x_1(t)$
$3x_1(t) \rightarrow 3y_1(t)$
$4x_2(t)$ girişi için sistem çıkışı $4y_2(t) = 5(4x_2(t)) = 20x_2(t)$

$4x_2(t) \rightarrow 4y_2(t)$
Girişlerin toplamına karşılık gelen çıkışlar toplamını göz önüne alırsak,
$3x_1(t) + 4x_2(t) = 3y_1(t) + 4y_2(t) \rightarrow 3y_1(t) + 4y_2(t) = 15x_1(t) + 20x_2(t)$ (1)

Sisteme tek tek girişler yerine $3x_1(t) + 4x_2(t)$ toplam girişini uyguladığımızda sistem çıkışı,

$$y(t) = 5\left(3x_1(t) + 4x_2(t)\right) = 5[3x_1(t)] + 5[4x_2(t)] \\ = 15y_1(t) + 20y_2(t) \qquad (2)$$

Bu durumda (1) ve (2) ifadeleri aynı olduğundan $y(t) = 5x(t)$ sistemi lineerdir.

Örnek

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = x^2(t)$ sistemin lineerliğini inceleyiniz.

Çözüm

Lineerlik için yine $L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$özellikler araştırılacaktır.

$x_1(t)$ giriş için $y_1(t) = (x_1(t))^2 = x_1^2(t)$
$x_2(t)$ giriş için $y_2(t) = (x_2(t))^2 = x_2^2(t)$

$c_1 x_1(t)$ giriş için $c_1 y_1(t) = (c_1 x_1(t))^2 = c_1^2 x_1^2(t)$
$c_2 x_2(t)$ giriş için $c_2 y_2(t) = (c_1 x_1(t))^2 = c_2^2 x_2^2(t)$

Buradan oluşan toplam $c_1 y_1(t) + c_2 y_2$ sistem cevabı

$c_1 y_1(t) = c_1^2 x_1^2(t)$ ve $c_2 y_2(t) = c_2^2 x_2^2(t)$ olduğundan

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1^2 x_1^2(t) + c_2^2 x_2^2(t) \qquad (1)$$

elde edilir. Diğer yandan bu elde edilen çıkış, lineerlik için toplam $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ girişinin yapıldığı anda elde edilene eşit olması gerekir. Buna göre $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ toplam girişi için sistemin toplam $c_1 y_1(t) + c_2 y_2$ cevabını hesaplayalım.

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \left[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\right]^2 = c_1^2 x_1^2(t) + 2c_1 c_2 x_1(t) x_2(t) + c_2^2 x_2^2 \qquad (2)$$

(1) ve (2) den görüldüğü gibi tek tek girişlerin cevabından elde edilen toplam $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1^2 x_1^2(t) + c_2^2 x_2^2(t)$ cevabıyla, toplam $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ girişinin yapıldığı amdaki toplam $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1^2 x_1^2(t) + 2c_1 c_2 x_1(t) x_2(t) + c_2^2 x_2^2$ cevabı eşit değildir. Diğer bir deyişle,

$$c_1^2 x_1^2(t) + c_2^2 x_2^2(t) \neq c_1^2 x_1^2(t) + 2c_1 c_2 x_1(t) x_2(t) + c_2^2 x_2^2$$

olduğundan sistem lineer değildir. Buna göre çıkış, girişin değiş oranlarında değişim gösterememektedir.

Belleksiz sistemler

$$h(t)=\begin{cases} 0 \quad , \quad t\neq 0 \quad \text{Belleksiz} \\ \text{Diğer} \quad , \quad t\neq 0 \quad \text{Bellekli} \end{cases}$$

Bellekli sistemler

$$y(t)=\mathbf{T}x(t_0)=\begin{cases} \text{belleksiz sistem} & t=t_0 \\ \text{bellekli sistem} & t=t-t_0 \;\; \text{veya} \;\; t=t-t_0 \rightarrow (t_0\neq 0) \end{cases}$$

Nedensel (causal) ve Nedensel Olmayan (noncausal) Sistemler

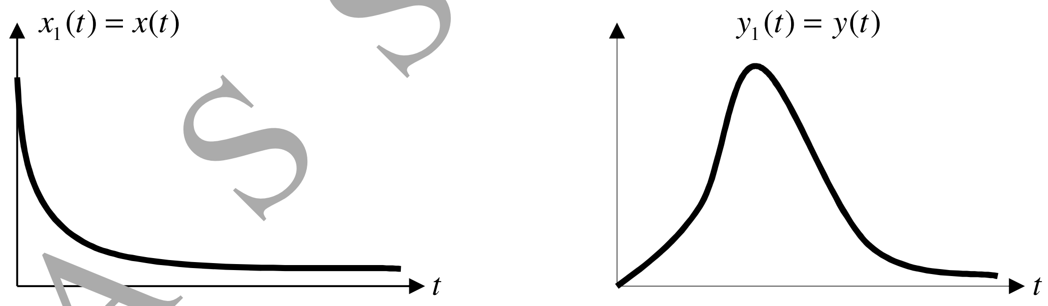
Bu tanıma göre girişin o anki ve önceki/geçmiş değerlerini baz alan bir sistemin cevabını iyi analiz etmek gerekir. Buna göre sisteme giriş uygulanmadan sistem çıkış üretmemelidir.

Örnek

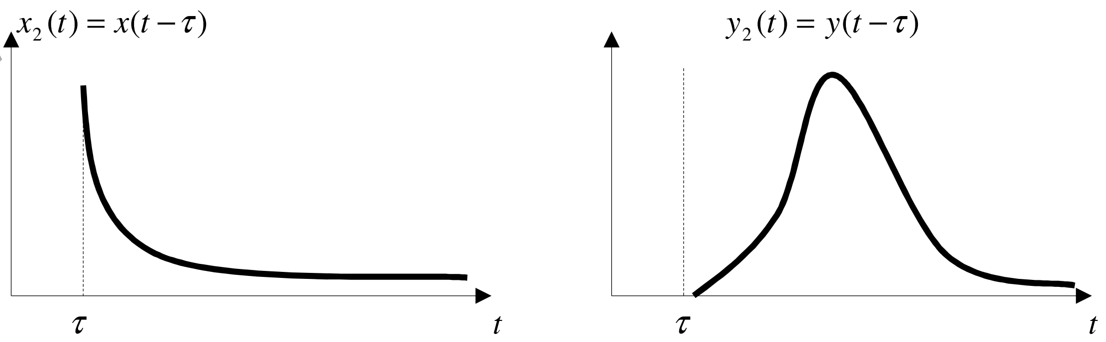
$y(t)=x(t-1)$ Nedensel sistem (ve bellekli sistem)
$y(t)=x(t)$ Nedensel sistem
$y(t)=x(t+1)$ Nedensel olmayan sistem

Zamandan Bağımsız-Bağımlı Sistemler

$x(t)\rightarrow y(t)$
$x(t-\tau)\rightarrow y(t-\tau)$



Şekil 15. t Anında sistem giriş ve çıkışları



Şekil 16. $t-\tau$ Anında sistem giriş ve

Örnek

$y(t) = 7x(t)$ sisteminin zamandan bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

Denklemden sistem katsayısı olarak bir sabitin (7) oluşu sistemin zamana bağımlı olmadığını (time invariant) göstermektedir. Ancak çıkışı girişe oranı açısından yaklaşırsak, oranın görüldüğü gibi

$$\frac{y(t)}{x(t)} = 7$$

Örnek

$y(t) = tx(t)$ sisteminin zamandan bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

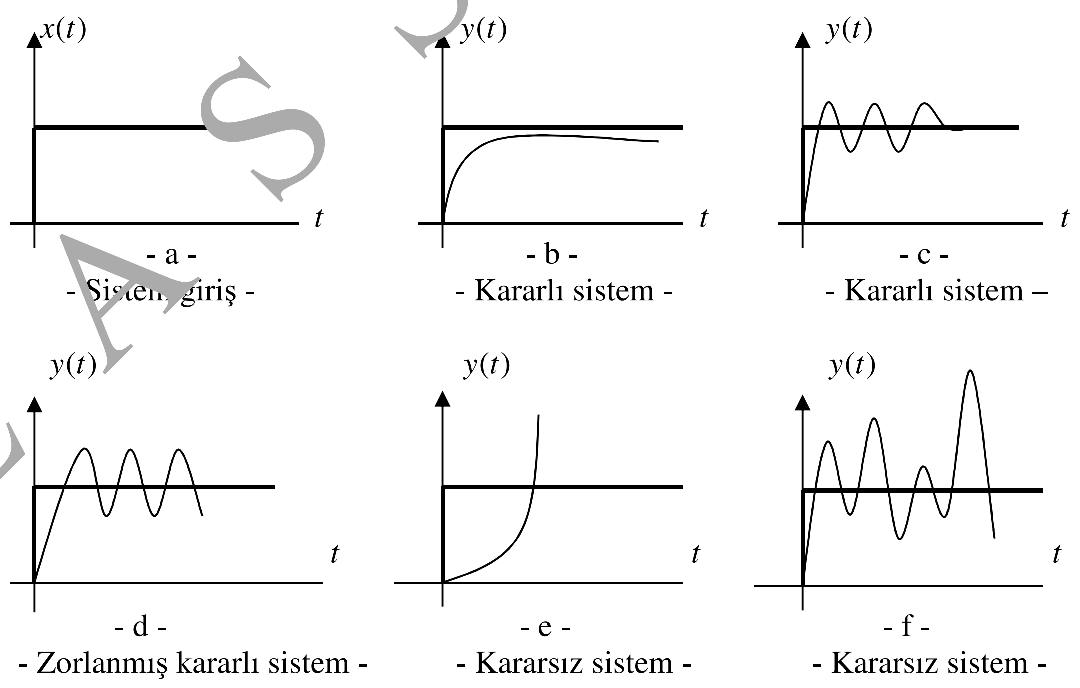
$y(t) = tx(t)$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t$$

Sistemlerin Kararlılığı

Lineer bir sistem sınırlı bir girişe sınırlı bir çıkış üretebiliyorsa sistem yine kararlı kabul edilir.

$$|x| \leq k_1$$
$$|y| \leq k_2$$



Şekil 20. Sistem girişi $x(t)$ (a)'ya sistemin kararlı-kararsız cevapları

LTI Sistemlerinin (sınırlı-giriş sınırlı-çıkış) Kararlılığı

$y(t) = x(t) * h(t)$

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$$

ANALOG İŞARET İŞLEME : FİLTRELER

Bu bölümde işaret tanıtımı veya işaret analizden ziyade, işaret işleme üzerinde durulacaktır. İşaret işleme ile kast edilen, alınan bir işaretin amaca uygun değiştirilmesiddir. Burada sistem olarak üzerinde durduğumuz Lineer Zamandan Bağımsız (LTI) sistemler söz konusu olacaktır. Bu türden LTI sistemlerindeki işlemler genel anlamıyla filtre olarak anılmaktadır. Sonuçta filtre çıkışındaki işaret belirli frekansları göz önüne alınarak işlendiğinden, sistem çıkışındaki işaret artık girişindeki işaret olmayıp, amaca uygun olarak daha farklı bir formdaki işarete dönüşmüştür.

Lineer Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Cevabı ve Konvülasyon

Lineer zamanla değişmeyen sistemler (LTI) girişleri $x[n]$ veya $x(t)$, impuls cevapları $h[n]$ veya $h(t)$ ve çıkışları $y[n]$ veya $y(t)$ olan sistemlerdir. Çıkışlar gerek ayrık gerekse sürekli formda bu sistemlerin giriş ve impuls cevaplarının convolution işlemlerinden elde edilmektedirler.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Giriş İşaretinin İmpulslerden Üretilmesi

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$

LTI Sistem Girişinde Üretilen Cevap

Burada bahsedilen sistem girişinin impulslerden oluştuğunu, ve bu giriş impulslerinin sistem impuls cevaplarını nasıl oluşturacağı ele alınacaktır. Bildiğimiz gibi eğer sistem lineer ise, $x(t)$ girişinin oluşturacağı $y(t)$ çıkışı aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

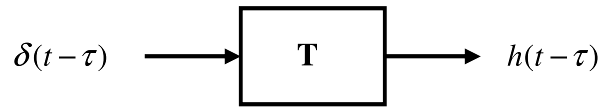
Eğer impuls cevabı, $\delta(t)$ impuls fonksiyonuyla üretiliyorsa

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\}$$

buna uygun $\delta(t-\tau)$ sistem girişi ile de $h(t-\tau)$ impuls cevabı da aşağıdaki gibi olacaktır.

$$h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}$$

$$h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}$$

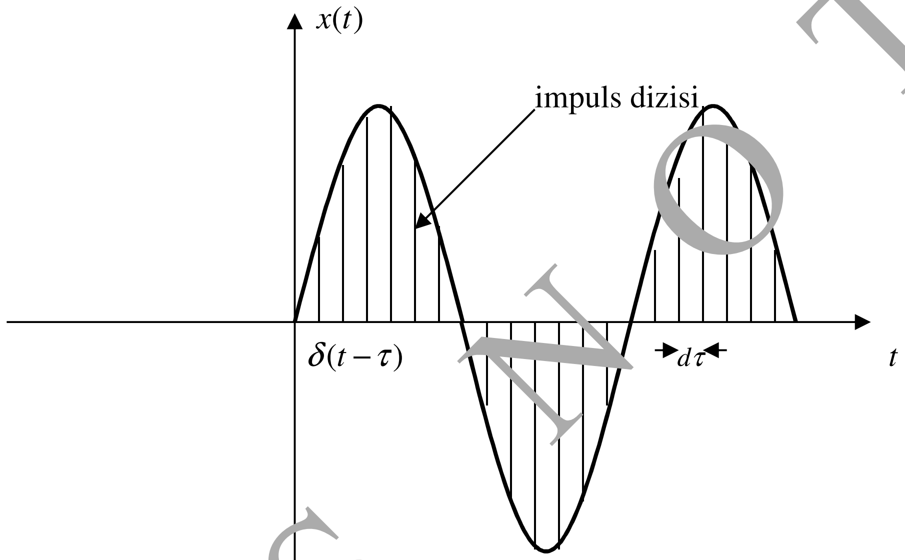


Şekil 24.İmpuls cevabın zamandan bağımsız özelliği

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

LTIC Sistemlerde Harici Girişe Sistemin Cevabı

$$x(t)=x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$



Şekil 25 $x(t)$ giriş işaretinin $\delta(t)$ ile gösterimi

Sistemlerin Cevapları

Toplam cevap =Sıfır-giriş cevabı + Sıfır-durum cevabı
Toplam cevap = Natural cevap + Zorlanmış cevap
Toplam cevap = Geçici cevap + Kararlı hal cevabı

KONVÜLASYON

Girişi $x(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t)$ olan bir sistemin çıkışını gösteren $y(t)$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = x(t)*h(t)$$

$$\text{Sistem cevabi} = \underbrace{\text{sifir - giris cevabi}}_{\text{diferansiyel denklemler}} + \underbrace{\text{sifir - durum cevabi}}_{\text{konvülasyon}}$$

Konvülasyon özellikleri

1) $\delta(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \delta(t)$

2)
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)d\tau$$
$$y(t) = x(t-T_1) * h(t-T_2) = y\left[t-(T_1+T_2)\right]$$

3. Impuls fonksiyonun birim eleman özelliği

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

Bir fonksiyonun birim impuls fonksiyonuyla konvülasyonu kendisini oluşturur.

4. Değişme özelliği

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

5. Birleşme özelliği

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$$

6. Dağılma özelliği

$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

7. Öteleme özelliği

$$x(t) * h(t) = c(t)$$

$$x(t) * h(t-T) = c(t-T)$$

$$x(t-T) * h(t) = c(t-T)$$
$$x(t-T_1) * h(t-T_2) = c(t-T_1-T_2)$$

Örnek

Sistem impuls cevabı $h_1(t) = e^{-7t}u(t)$ olan sistemin cevabını

a) $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için

b) $x_2(t) = e^{-4t+6}u(t-3)$ girişi için hesaplayın.

c) $x_2(t) = e^{-4t+6}u(t-3)$ girişi ve $h_2(t) = e^{-7t+14}u(t-2)$ impuls cevabı için sistem cevabını bulun.

Çözüm

a) LTI sistem cevabı konvülasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$y_1(t) = x_1(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2t}u(t)][e^{-7(t-\tau)}u(t-\tau)]\; d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau}u(\tau)][e^{-5(t-\tau)}u(t-\tau)]\; d\tau$$

$$= \int_0^t [e^{-2\tau}][e^{-7(t-\tau)}]\; d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} e^{-7t} e^{7\tau} d\tau = \int_0^t e^{5\tau} d\tau = \frac{e^{-7t}}{5}(e^{5\tau})_0^t$$

$$= \frac{e^{-7t}}{5}(e^{5t} - e^0) = \frac{e^{-7t}}{5}(e^{5t} - 1^0) = \frac{1}{5}(e^{-2t} - e^{-7t})$$

$$y_1(t) = \frac{1}{5}(e^{-2t} - e^{-7t})u(t)$$

b) $x_2(t) = e^{-4t+6}u(t-3)$ girişi düzenlenirse,

$$x_2(t) = e^{-4t+6}u(t-3) = e^{-2(t-3)}u(t-3) = x_1(t-3)$$

olduğu görülecektir. Buna göre konvülasyonun $x(t-T) * h(t) = c(t-T)$ öteleme özelliğinden eğer $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için $y_1(t)$ hesaplandıysa, buna göre
$y_2(t) = y_1(t-3)$

olacaktır. Buna göre ikinci sistem cevabını hesaplamayı sonuçlandırabiliriz.

$$y_2(t) = y_1(t-3) = \frac{1}{5}(e^{-2(t-3)t} - e^{-7(t-3)})u(t-3)$$

c) Dikkat edilirse $x_2(t) = x_1(t-3)$ iken, bu kez de $h_2(t) = h_1(t-2) = e^{-7(t-2)}u(t-2)$. Buradan ilgili $x(t-T_1) * h(t-T_2) = c(t-T_1-T_2)$ konvülasyon özelliği hatırlanırsa sistem cevabı bu kez,

$$y_2(t) = y_1(t-3-2) = y_1(t-5) = \frac{1}{5}(e^{-2(t-5)} - e^{-7(t-5)})u(t-5)$$

Örnek

Verilen LTI sistemin cevabını hesaplayın konvülasyon integrali ile hesaplayın.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-5\beta}u(\beta-4)][e^{-(t-\beta)}u(t-\beta)]\, d\beta$$

Çözüm

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-5\beta}u(\beta-4)][e^{-(t-\beta)}u(t-\beta)]\, d\beta = \int_4^t [e^{-5\beta}][e^{-(t-\beta)}]\, d\beta = \int_4^t e^{-5\beta}e^{-t}e^{\beta}\; d\beta = e^{-t}\int_4^t e^{-4\beta}\; d\beta$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-t}(e^{-4\beta})_4^t = -\frac{1}{4}e^{-t}(e^{-4t} - e^{-4\times 4}) = -\frac{1}{4}e^{-5t} + \frac{1}{4}e^{-(t+16)} = -\frac{1}{4}(e^{-5t} - e^{-(t+16)})u(t)$$

Örnek

$x(t) = \mathrm{rect}(t) * \cos(2\pi t)$ İşlemini hesaplayın.

Çözüm

$$x(t) = \mathrm{rect}(t) * \cos 2\pi t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\cos 2\pi(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\cos(2\pi t - 2\pi\tau)d\tau$$

Kural : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \mathrm{rect}(t) * \cos\pi t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\cos(2\pi t - 2\pi\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\left[\cos 2\pi t \cos 2\pi\tau + \sin 2\pi t \sin 2\pi\tau\right]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\cos 2\pi t \cos 2\pi\tau d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\sin 2\pi t \sin 2\pi\tau d\tau$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} (1)\cos 2\pi t \cos 2\pi\tau d\tau + \int_{-1/2}^{1/2} (1)\sin 2\pi t \sin 2\pi\tau d\tau$$

$$= \cos 2\pi t \int_{-1/2}^{1/2} \cos 2\pi\tau d\tau + \sin 2\pi t \int_{-1/2}^{1/2} \sin 2\pi\tau d\tau = \frac{1}{2\pi}\cos\pi t\left[\sin 2\pi\tau\right]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\left[-\cos 2\pi\tau\right]_{-1/2}^{1/2}$$

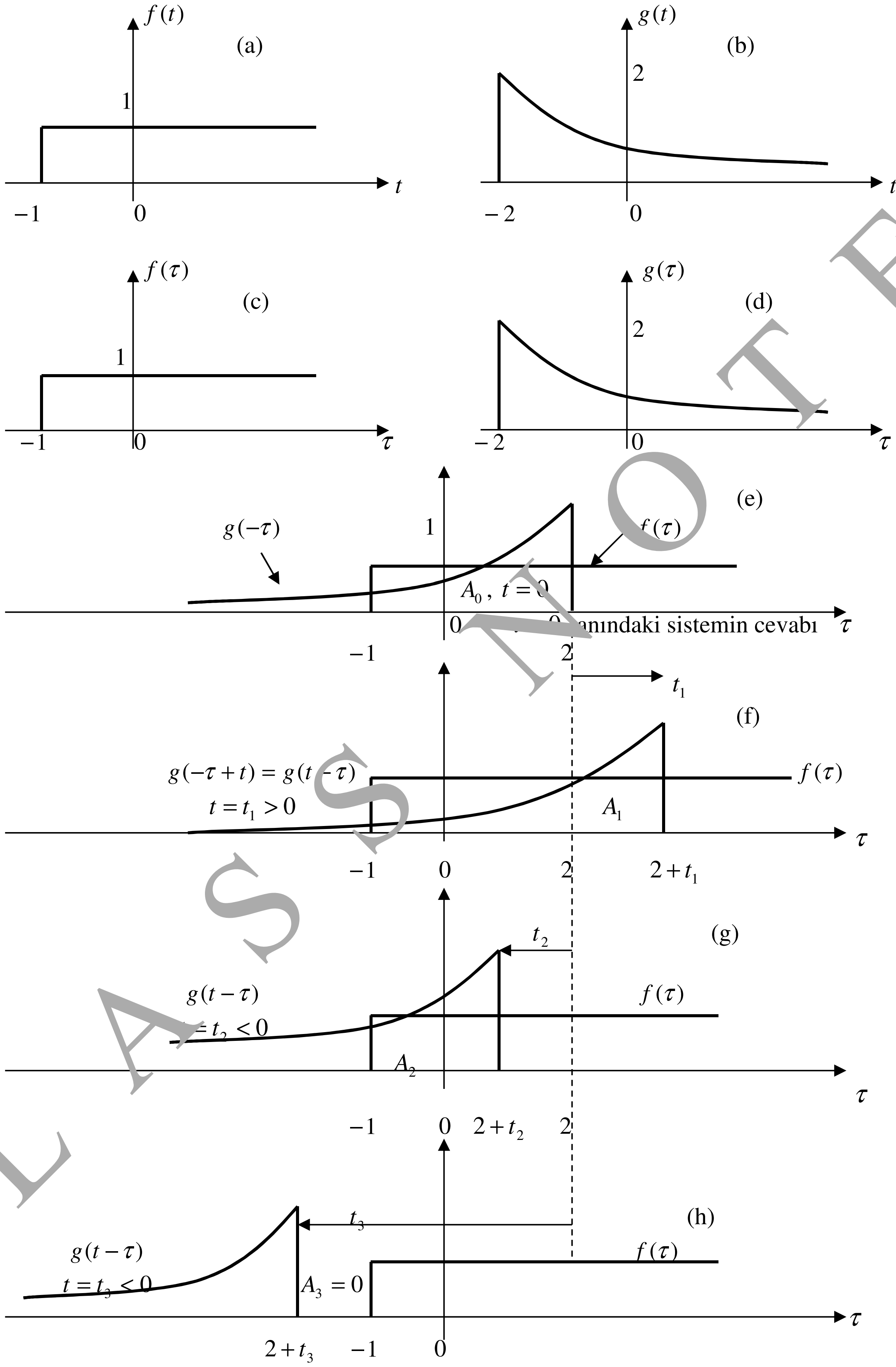
$$= \frac{1}{2\pi}\cos\pi t\left[\sin\left(2\pi\frac{1}{2}\right) - \sin\left(-2\pi\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\left[\cos\left(2\pi\frac{1}{2}\right) - \cos\left(-2\pi\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cos\pi t\left[\sin\pi + \sin\pi\right] - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\left[\cos\pi - \cos\pi\right] = \frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\left[0+0\right] - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\left[0-0\right] = 0$$

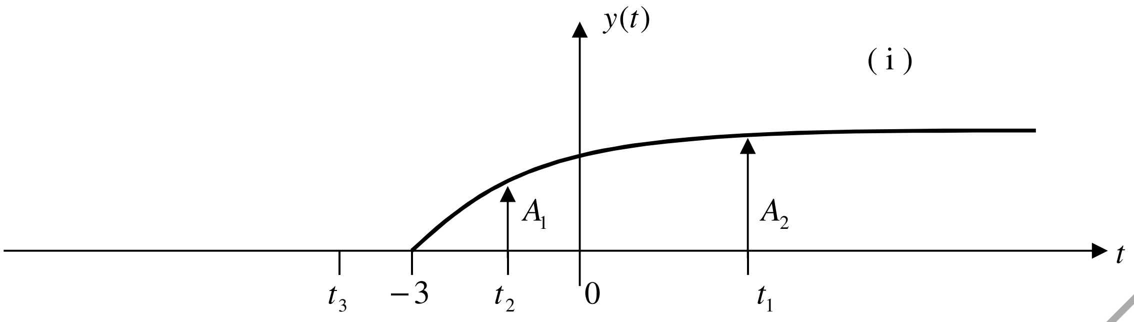
$$y(t) = \mathrm{rect}(t) * \cos(2\pi t) = 0$$

Konvülasyonun Grafik Yorumu

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$



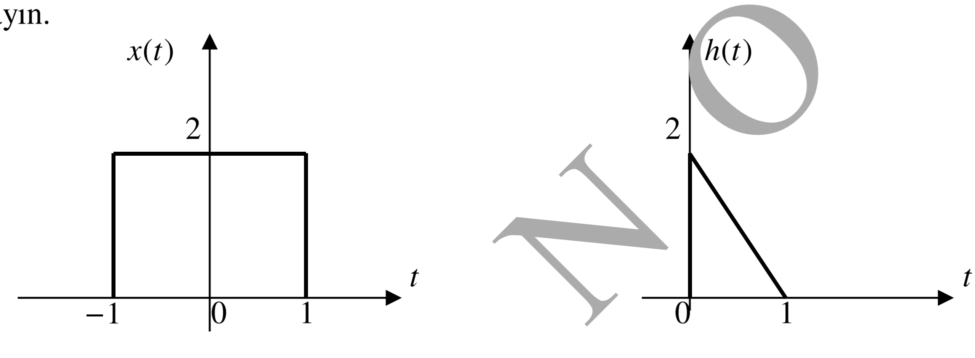
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
f(t)
g(t)
f(τ)
g(τ)
g(−τ)
anındaki sistemin cevabı
g(−τ+t) = g(t−τ)
t = t₁ > 0
g(t−τ)
t = t₂ < 0
t = t₃ < 0
A₀ , t = 0
A₁
A₂
A₃ = 0
2 + t₁
2 + t₂
2 + t₃



Şekil 30. Konvülasyon işleminin grafik gösterimi

Örnek

Giriş $x(t)$ ve sistem impuls fonksiyonu $h(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanıyorsa sistem çıkışı $y(t)$ yi hesaplayın.



- a -   - b -

Şekil 31. Sistem giriş ve impuls fonksiyonları

Çözüm

Verilen tanımlara göre $x(t)$ ve $h(t)$ nın değişimleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -1 < t < 1 \\ 0, & -1 > t > 1 \end{cases} \quad ; \quad h(t) = \begin{cases} -2t+2, & 0 < t < 2 \\ 0, & 0 > t > 2 \end{cases}$$

Sistem çıkışı $y(t)$, giriş ve çıkışın konvolüsyonu olarak $y(t) = x(t) * h(t)$ ile hesaplanacaktır.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

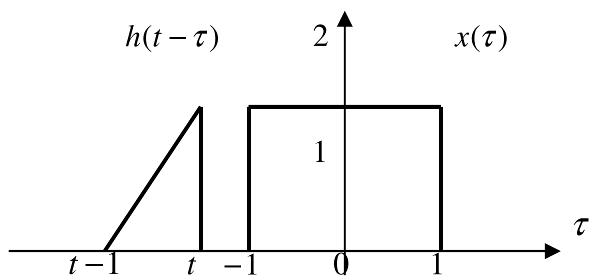
Kuralı gereğince impuls fonksiyonu üzerinde teknik olarak convolution prosesi ile ilgili olarak sırasıyla

1. $h(t) \to h(\tau)$, 2. $h(\tau) \to h(-\tau)$, 3. $h(-\tau) \to h(-\tau + t)$, 4. $h(-\tau + t) = h(t-\tau)$

Not : Yukarıda Şekil (b) de verilen üçgene ait $h(t) = -2t + 2$ denklemi aslında bir tür "doğru denklemi" dir. Koordinatları belli olan bir doğrunun belirlenmesini iyi bilmekteyiz :

1. $t < -1$ için

Bu durum Şekil (d) ye özdeş olacaktır.



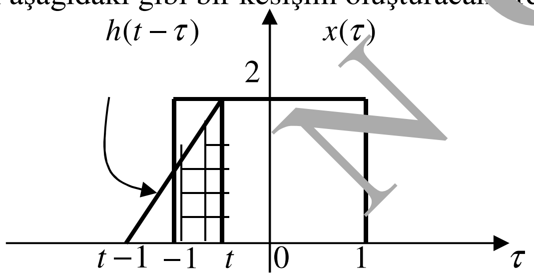
- c -

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ bağıntısına göre $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ arasında bir örtüşme olmadığı için convolution, dolaysıyla çıkış sıfır olacaktır.

$y(t) = 0\,, \quad t < -1$

2. $-1 < t < 0$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi bir kesişim oluşturacaklardır.



- d -

burada taralı alanın hesaplanması gerekecektir. Bunun için kullanılacak

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

integrasyonda gerekli parametrelerin yerine yazılması gerekecektir. Integrasyondaki alt ve üst sınırın $(-1, \;\; t)$ olduğu, $x(\tau) = 2$ (dörtgenin değeri), $h(t) = -2t + 2$ ise $h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t+1+\tau)$ alınırsa integrasyon,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{t} (2)\,[2(-t+1+\tau)]\, d\tau = 4\int_{-1}^{t} [(1-t)+\tau)]\, d\tau$$

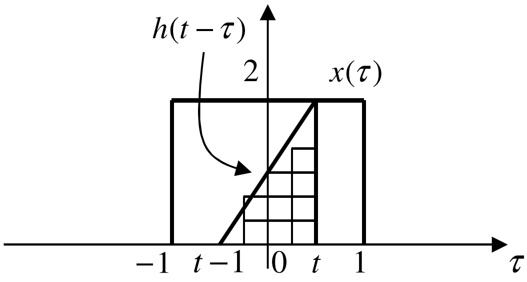
$$= 4[(1-t)\,\tau + \frac{\tau^2}{2}]_{-1}^{t} = 4\left[[(1-t)t + \frac{t^2}{2}] - [(1-t)(-1) + \frac{(-1)^2}{2}] \right] = 4\left[[t - t^2 + \frac{t^2}{2}] - [-1 + t + \frac{1}{2}] \right]$$

$$= 4\left[t - \frac{t^2}{2} + 1 - t - \frac{1}{2} \right] = 4\left[-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \right] = (-2t^2 + 2)$$

$$= 2(1 - t^2)$$

3. $0 < t < 1$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi oluşacaktır.



- e -

Taralı alanın benzer şekilde hesaplanması gerekecektir. Bunun için kullanılacak

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

integrasyonda gerekli parametrelerin yerine yazılması gerekecektir. İntegrasyondaki alt ve üst sınırın ($t-1,\ t$) olduğu, $x(\tau) = 2$ (dörtgenin değeri), $h(t) = -2t + 2$ ise $h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t + 1 + \tau)$ alınırsa integrasyon,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^{t} (2)\,[2(-t+1+\tau)]\, d\tau = 4\int_{-1}^{t} [(1-t)+\tau)]\, d\tau$$

$$= 4[(1-t)\,\tau + \frac{\tau^2}{2}]_{t-1}^{t} = 4\left[[(1-t)t + \frac{t^2}{2}] - [(1-t)(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2}]\right]$$

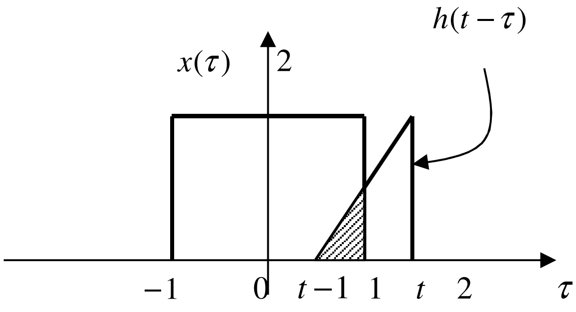
$$= 4\left[[t - t^2 + \frac{t^2}{2}] - [-(1-2t+t^2) + \frac{t^2-2t+1}{2}]\right] = 4\left[[t - \frac{t^2}{2}] - [-1 + 2t - t^2 + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}]\right]$$

$$= 4\left[[t - \frac{t^2}{2}] - [-\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2}]\right] = 4\left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right] = 4\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= 2$$

4. $1 < t < 2$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi oluşacaktır.



- f -

Taralı alanın benzer şekilde hesaplanması gerekecektir. Bunun için kullanılacak

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

integrasyonda gerekli parametreler olarak alt ve üst sınırın ($t-1, 1$) olduğu, $x(\tau) = 2$ (dörtgenin değeri), $h(t) = -2t + 2$ ise $h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t + 1 + \tau)$ alınırsa integrasyon,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^{1} \ (2)\,[2(-t+1+\tau)]\, d\tau = 4\int_{t-1}^{1} [(1-t)+\tau)]\, d\tau$$

$$= 4[(1-t)\,\tau + \frac{\tau^2}{2}]_{t-1}^{1} = 4\left[[(1-t)+\frac{1}{2}] - [(1-t)(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2}] \right]$$

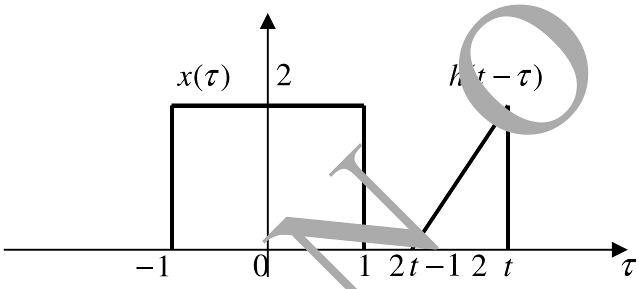
$$= 4\left[[1-t-+\frac{1}{2}] - [-(1-2t+t^2) + \frac{t^2-2t+1}{2}] \right] = 4\left[[\frac{3}{2} - t] - [-1+2t-t^2+\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}] \right]$$

$$= 4\left[[\frac{3}{2} - t] - [-\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2}] \right] = 4\left[\frac{3}{2} - t + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \right] = 4\left[\frac{t^2}{2} - 2t + 2 \right] = (2t^2 - 8t + 8) = 2(t^2 - 4t + 4)$$

$$= 2(t-2)^2$$

5. $2 < t$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi oluşacaktır.



- g -

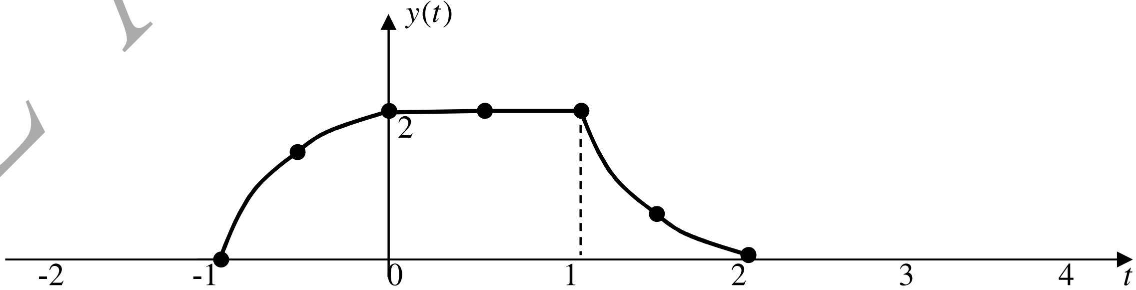
Son durumda $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ arasında örtüşme olmadığından bir alan söz konusu olamayacağından convolution veya sistem çıkış fonksiyonu sıfır olacaktır.

$y(t) = 0\,, \quad t > 2$

bulunan çıkışlar aşağıdaki tabloda ayrıca derlenmiştir.

Çıkış	$t < -1$	$-1 < t < 0$	$0 < t < 1$	$1 < t < 2$	$2 < t$
$y(t)$	0	$2(1-t^2)$	2	$2(t-2)^2$	0

Tablo nihai olarak aşağıdaki değişime gösterir.



- h -

Şekil 32. Örneğe ait çıkışın $y(t) = x(t) * h(t)$ convolution ile hesaplanması