LTI Sistemlerin Lineer Diferansiyel Denklemlerle Gösterimi

Burada sürekli sistemlerin diferansiyel denklemlerle gösterimi üzerinde durulacaktır. *n*. dereceden genel bir lineer sabit katsayılı diferansiyel denklemin gösterimi :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\, y(t) = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 f(t)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k}$$

$$D = d/dt$$

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0)\, y(t) =$$
$$(b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + b_{m-2}D^{m-2} + \cdots + b_1 D + b_0)\, f(t)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^n y(t) \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} b_k D^m f(t)$$

Eğer $Q(D)$ ve $P(D)$ yukarıdaki sistemi aşağıdaki gibi tanımlayan polinomlar olursa,

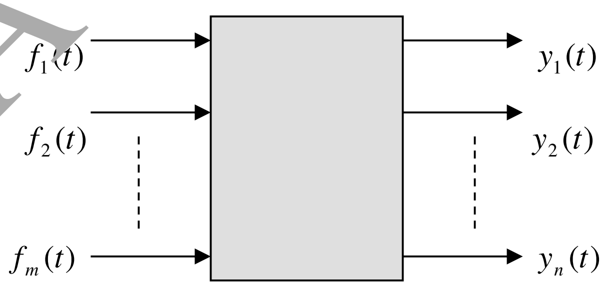
$$Q(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0$$

$$P(D) = b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + b_{m-2}D^{m-2} + \cdots + b_1 D + b_0$$

bunların ışığında diferansiyel denklem sistemi

$$Q(D)\, y(t) = P(D)\, f(t)$$

Sistem Cevabının Hesaplanması



Şekil 1.Sistem

Lineer Sistemin Cevapları

Toplam cevap = Homojen çözüm + Özel Çözüm

Toplam cevap = sıfır – giriş cevabı + sıfır-durum cevabı
homojen çözüm — özel çözüm

Başlangıç Koşulları ve Sistem Cevabı

Başlangıç koşullarını özellikle $t = 0^{-}$ anını dikkate alan sistem çözümü " *sıfır-giriş cevabı* " dır, yani,

$$f(t) = 0$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 f(t)$$

diferansiyel denklem sisteminin girişle ilgili sağ tarafı sıfır alınarak ($f(t) = 0$) homojen çözüm yapılacaktır.

$$Q(D)\, y(t) = 0$$

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0)\, y(t) = 0$$

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0)\, y_{zi}(t) = 0$$

$$y_{zi}(t) = c e^{\lambda t}$$

$$D\, y_{zi}(t) = \frac{dy_{zi}}{dt} = c\lambda\, e^{\lambda t}$$

$$D^2\, y_{zi}(t) = \frac{d^2 y_{zi}}{dt^2} = c\lambda^2\, e^{\lambda t}$$

$$D^3\, y_{zi}(t) = \frac{d^3 y_{zi}}{dt^3} = c\lambda^3\, e^{\lambda t}$$

$$\vdots$$

$$D^n\, y_{zi}(t) = \frac{d^n y_{zi}}{dt^n} = c\lambda^n\, e^{\lambda t}$$

Bunları yukarıdaki denklemde yerine koyarsak,

$$c\,(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0)\, e^{\lambda t} = 0$$

Bu denklemin çözümünün,

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

olacağı açıktır. Bu son denklemin, yukarıda yazılan denklemlerden

$$Q(\lambda) = 0$$

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

Buradan n tane $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ kök ve buna bağlı olarak n tane $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ katsayısının bulunduğunu ve nihayet n tane de $c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}, c_3 e^{\lambda_3 t}, \cdots, c_n e^{\lambda_n t}$ sistem cevabı olacağından genel çözüm bulunan cevapların lineer kombinasyonları olarak

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$$

şeklinde neticelenecektir. Sıfır-giriş cevabı için çözümde görünen $e^{\lambda_i t}$ $(i = 1,2,3,\cdots,n)$ ifadesi **karakterisitk mod** olarak anılır. Karakterisitk mod, sıfır giriş cevabının yanı sıra sıfır-durum cevabının çözümünde de önemli rol oynayacaktır.

Öz Değerlerin Lineer Sistem Davranışının Belirlenmesine Etkisi

TR = Transient Response (geçici (hal) sistem cevabı)
SSR = Steady State Response (kalıcı (ha, resjiml) sistem cevabı)

$$\textbf{Toplam sistem cevabı} = \underbrace{\textbf{Geçici rejim cevabı}}_{\text{transient response}} + \underbrace{\textbf{Kalıcı rejim cevabı}}_{\text{steady state response}}$$

Öz Değerler ve Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri

Tek giriş tek çıkışlı klasik lineer sistemlerin analizinde göz önüne alınan matematiksel modelin $x(t)$ girişi ve $y(t)$ çıkışına bağlı aşağıdaki gibi ifade edilebilecek bir diferansiyel denklem sistemi olduğunu göz önüne alırsak,

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{L/R} = \frac{R}{L}$$

Öz Değerler ve Lineer Sistem Geçici Cevabı

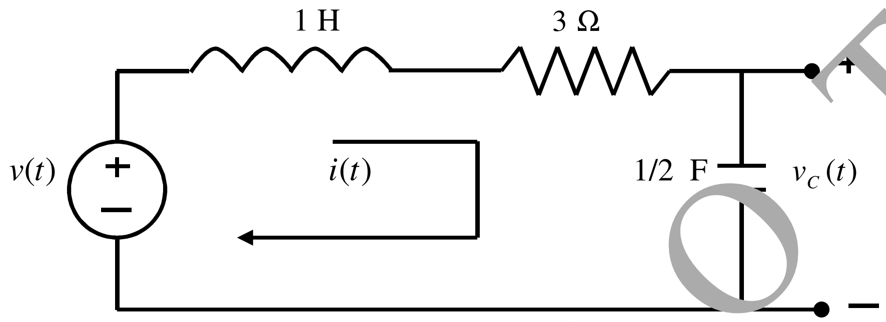
$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$$

Bu gösterimdeki λ_i öz değerlerin, genel olarak $\lambda_i = a_i \mp j\omega_i$ yapısında olmasına göre öz değerler farklı tiplere ayrılırlar.

1. Reel öz değerler : $\lambda_i = a_i \quad (\omega_i = 0$ için)
2..Kompleks öz değerler ($\lambda_i = a_i + j\omega_i$)
3. Katlı öz değerler : $\lambda_i = \lambda_{i+1} \quad (\omega_i = 0$ için)

Örnek

Aşağıda verilen elektrik devresinin çözümünü sağlayan diferansiyel denklem ifadesini elde ederek, $y_0(0) = 0$ ve $\dot{y}(0) = -5$ başlangıç koşullarına göre olan sistemin cevabını elde edin.



Şekil 3.RLC devresi

Çözüm

Kirchoff kuralı uygulandığında,

$$v_L(t) + v_R(t) + v_c(t) = v(t)$$
$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)$$

Basitlik açısından,

$$y(t) = i(t)$$
$$x(t) = v(t)$$

olsun.

$$L\frac{dy(t)}{dt} + Ry(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = x(t)$$
$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + \frac{1}{1/2}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = x(t)$$
$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = x(t)$$

Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt}$$

Diferansiyel çözüm için,

$D=\frac{d}{dt}$ alınırsa, $\frac{d^2y}{dt^2}=D^2y(t)$, $\frac{dy}{dt}=Dy(t)$

olarak alınırsa genel denklem,

$$(D^2+3D+2)y(t)=Dx(t)$$

oluşur. Her iki taraf $\frac{1}{D}$ ile çarpılırsa

$$(D+3+2\frac{1}{D})y(t)=x(t)$$

oluşur. Burada,

$$\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau=\frac{1}{D}y(t)$$

<u>Diferansiyel denklemin çözümü</u>

Bu noktadan itibaren, diferansiyel denklemlerle ifade edilen lineer zamandan bağımsız sistemlerin sıfır-giriş veya sıfır-durum cevaplarına yönelik çözümleri ele alınacaktır.

$$(D^2+3D+2)y(t)=Dx(t)$$

Buradan "*sıfır giriş cevap*, $y_{zi}(t)$ " olarak girişin olmadığı ($x(t)=0$) başlangıç koşulları göz önüne alarak $y_0(t)$ çözümü araştırılacaktır. Bunun için aşağıdaki adımlar icra edilecektir. Öncelikle başlangıç koşullarıyla ilgili $y_0(0)$ ve $\dot{y}_0(0)$ kabulleri yapılacaktır. Buna göre ,

$y_0(0)=0$ ve $\dot{y}_0(0)=-5$

Buna göre $x(t)$ sıfır giriş cevap, $x(t)=y_{zi}(0)=0$ olduğu için,

$$(D^2+3D+2)y_0(t)=0$$

Bu durumda karakteristik polinomun kökleri,

$$Q(\lambda)=0$$

durumuna göre,

$$\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+2)(\lambda+1)=0$$

$\lambda_1 = -2$ ve $\lambda_2 = -1$

başlangıç koşullarına göre toplam çözüm,

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 nin bulunması gerekecektir. Bunun için,

$$y_0(0) = 0$$

bilindiğine göre, yukarıdaki denklemden,

$$0 = c_1 + c_2$$

bulunur. İkinci bir denklemi daha bulmak için

$$\dot{y}_0(0) = -5$$

ise, yukarıdaki denkleminde türevi alınırsa,

$$\dot{y}_0(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t}$$

ve

$$\dot{y}_0(0) = -2c_1 e^{-0} - c_2 e^{-0}$$

$$-5 = -2c_1 - c_2$$

sonuçta bulunan denklemler ;

$$0 = c_1 + c_2$$
$$5 = 2c_1 + c_2$$

denklem çifti çözülürse,
$c_1 = 5$ ve $c_2 = -5$

Nihai sistem " sıfır giriş cevabı, $y_{zi}(t)$ " ;

$$y_0(t) = 5e^{-2t} - 5e^{-t} \quad , \quad t \geq 0$$

Örnek

Girişi $x(t)$ ve çıkışı $y(t)$ olan sürekli bir sisteme ait verilen

$$(D^2 + 6D + 9)\,y(t) = (3D + 5)\,x(t)$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm

Çözüm olarak başlangıç koşullarına göre sistemin cevabı kastedilmektedir. Buradan "*sıfır giriş cevap*, $y_{zi}(t)$ " olarak , $y_0(0)$ ve $\dot{y}_0(0)$ başlangıç koşullarına göre çözüm araştırılacaktır.

$y_0(0) = 3$ ve $\dot{y}_0(0) = -7$
buna göre $x(t)$ sıfır giriş cevap, $x(t) = y_{zi}(0) = 0$ olduğu için,

$$(D^2 + 6D + 9)\,y_0(t) = 0$$

bu durumda karakteristik polinomun kökleri,

$$Q(\lambda) = 0$$

durumuna göre,

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$$

Denklemi çözüldüğünde,

$$\lambda_1 = -3 \text{ ve } \lambda_2 = -3$$

başlangıç koşullarına göre toplam çözüm,

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-3t}$$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 nin bulunması gerekecektir. Bunun için,

$$y_0(0) = 3$$

bilindiğine göre, yukarıdaki denklemden,

$$y_0(0) = (c_1 + c_2 0)e^0$$

$$3 = c_1$$

bulunur. İkinci bir denklemi daha bulmak için
$$\dot{y}_0(0) = -7$$

ise, yukarıdaki denkleminde türevi alınırsa,

$$\dot{y}_0(t) = c_2 e^{-3t} - 3(c_1 + c_2 t)e^{-3t}$$

ve

$$\dot{y}_0(0) = c_2 e^0 - 3(c_1 + c_2 0)e^0$$

$$-7 = c_2 - 3c_1$$

sonuçta bulunan denklemler ;

$3 = c_1$

$7 = 3c_1 - c_2$

$$c_2 = 2$$

bulunur.

Nihai sistem “ sıfır giriş cevabı, $y_{zi}(t)$ ” ;

$$y_0(t) = (3 + 2t)e^{-3t} \quad , \quad t \geq 0$$

Örnek

Girişi $x(t)$ ve çıkışı $y(t)$ olan sürekli bir sisteme ait verilen

$$(D^2 + 4D + 40)y(t) = (D + 2)x(t)$$

diferansiyel denkleminin başlangıç koşullarına göre cevabını bulun.

Çözüm

Buradan yine “*sıfır giriş cevap*, $y_{zi}(t)$ “ olarak , $y_0(0)$ ve $\dot{y}_0(0)$ başlangıç koşullarına göre çözüm araştırılacaktır.

$y_0(0) = 2$ ve $\dot{y}_0(0) = 16.78$

Buna göre $x(t)$ sıfır giriş cevap, $x(t) = y_{zi}(0) = 0$ olduğu için,

$$(D^2 + 4D + 40)y_0(t) = 0$$

Bu durumda karakteristik polinomun kökleri,

$$Q(\lambda) = 0$$

durumuna göre,

$$\lambda^2 + 4\lambda + 40 = (\lambda + 2 - j6)(\lambda + 2 + j6) = 0$$

denklemi çözüldüğünde,

$$\lambda_1 = -2 + j6 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = -2 - j6$$

başlangıç koşullarına göre toplam çözüm,

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

bulunan kökler yerine yazıldığında aranan çözümün

$$y_0(t) = ce^{-2t}\cos(6t + \theta)$$

denklemiyle mümkün olacağı görülmektedir. Buradan c nin bulunması gerekecektir. Bunun için,

$$y_0(0) = 2$$

bilindiğine göre, yukarıdaki denklemden,

$$y_0(0) = c\cos\theta$$

$$2 = c\cos\theta$$

bulunur. İkinci bir denklemi daha bulmak için

$$\dot{y}_0(0) = 16.78$$

ise, yukarıdaki denkleminde türevi alınırsa,

$$\dot{y}_0(t) = -2ce^{-2t}\cos(6t + \theta) - 6ce^{-2t}\sin(6t + \theta)$$

ve

$$\dot{y}_0(0) = -2ce^{0}\cos\theta - 6ce^{0}\sin\theta$$

$$16.87 = -2c\cos\theta - 6c\sin\theta$$
$2 = c\cos\theta$ idi.

$$16.87 = -2 \times 2 - 6c\sin\theta$$

$$-3.463 = c\sin\theta$$
$$2 = c\cos\theta$$

Her iki ifadenin karelerini alıp toplarsak,

$$c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2^2 + (-3.463)^2$$

$$c = 4$$

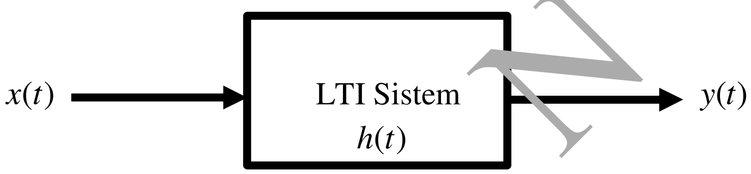
$$\cos\theta = \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$
$$\sin\theta = -\frac{3.463}{4} = -\frac{\pi}{3}$$
$$\theta = IV \quad \text{bölge} \; = \frac{5\pi}{3}$$

Nihai sistem " sıfır giriş cevabı, $y_{zi}(t)$ " ;

$$y_0(t) = 4e^{-2t}\cos(6t + \frac{5\pi}{3}) \quad , \qquad t \geq 0$$
$$y_0(t) = 4e^{-2t}\cos(6t + \frac{5\pi}{3})u(t) = y_{zi}(t)$$

IMPULS CEVABI ve LİNEER ZAMANDAN BAĞIMSIZ (LTI) DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

Bir LTI sistemin $y(t)$ cevabı girişindeki $x(t)$ ve $h(t)$ impuls cevabının konvülüsyonu ile belirlenmekteydi.



Şekil 8. LTI sistem cevabı

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$h(t) = b_n\delta(t) + \left[P(D)y_n(t)\right]u(t)$$

$$y_n^{n-1}(0) = 1 \quad , \quad y_n(0) = \dot{y}_n(0) = \ddot{y}_n(0) = \cdots = y_n^{n-2}(0) = 0$$

Gösterimdeki $y_n^k(0)$ terimi, $y_n(t)$ cevabının $t = 0$ anındaki k.cı türevidir. Ayrıca n ise diferansiyel denklem sisteminin derecesini göstermektedir.Bunun daha açık şeklini aşağıdaki gibi göz önüne alabiliriz.

$$n = 1 \;:\; y_n(0) = 1$$
$$n = 2 \;:\; y_n(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \dot{y}_n(0) = 1$$
$$n = 3 \;:\; y_n(0) = \dot{y}_n(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \ddot{y}_n(0) = 1$$
$$n = 4 \;:\; y_n(0) = \dot{y}_n(0) = \ddot{y}_n(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \dddot{y}_n(0) = 1$$

Örnek

Hatırlanacağı gibi daha önce girişi devre gerilimi ($x(t) = v(t)$) ve çıkışı devre akımı ($y(t) = x(t)$) , $y_0(0) = 0$ ve $\dot{y}_0(0) = -5$ başlangıç koşulları ve $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$ olan bu devrenin $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt}$ diferansiyel denklem sistemi ve $y_0(0) = 0$ ve $\dot{y}_0(0) = -5$ başlangıç koşulları ile verilen sistemin diferansiyel operatöre bağlı ifadesi,

$$(D^2 + 3D + 2)\,y(t) = D\,x(t)$$

biçiminde olup, sistemin başlangıç koşullarıyla ilgili sıfır-giriş cevabı,

$$y_{zi}(t) = 5e^{-2t} - 5e^{-t}$$

olarak bulunmuştu. Şimdi ikinci kısım olan sıfır-durum cevabını araştıralım. Bunun için sistem giriş işaretinin

$$x(t) = 10e^{-3t}u(t) = v(t)$$

olarak verildiğini devreden de biliyoruz. Öyleyse sistem-durum cevabının hesaplanması için, sistem impuls cevabını $h(t)$ bulmamız gerekecektir. Daha öncede belirtmiştik ki, karakteristik denklem aynı zamanda, sıfır-durum cevabının bulunmasında da önemli rol oynamaktadır.

$$(D^2 + 3D + 2)\,y(t) = D\,x(t)$$

Bu sistem ikinci dereceden ($n = 2$) bir karakteristik polinoma sahip olacaktır.

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Karakterisitk denklemin kökleri

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = -2$$

sistem çözümü

$$y_n(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$$

$y_{zs}(t)$ nin türevi alınırsa,

$$\dot{y}_{zs}(t) = \frac{dy_{zs}(t)}{dt} = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t}$$

özel başlangıç koşullarının,

$$\dot{y}_n(0) = 1 \quad \text{ve} \quad y_n(0) = 0$$

olduğunu biliyoruz. Bunları ilgili denklemde yerlerine yazarsak

$$y_n(0) = 0 = c_1 + c_2$$

$$\dot{y}_n(0) = 1 = -c_1 - 2c_2$$

denklemleri toparlarsak,

$$0 = c_1 + c_2$$

$1 = -c_1 - 2c_2$ buradan, $c_1 = 1$ ve $c_2 = -1$

bulunur. Bunları çözüm denkleminde yerine yazarsak,

$$y_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

elde edilir. Buradan aranan sistem impuls cevabı,

$$h(t) = b_n\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

$$P(D)y_n(t) = \dot{y}_n(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Şu an başlangıç koşulları için çözüm yapıldığından, $x(t) = 0$ olduğundan dolayı, $b_n = 0$ olacağından,

$$h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

Şimdi $h(t)$ asıl sıfır-durum cevabının bulunacağı konvülasyon denkleminde yerine yazılabilir.

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) = x(t) * h(t) &= 10e^{-3t}u(t) * (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) \\ &= 10e^{-3t}u(t) * [2e^{-2t} - e^{-t}]u(t) \end{aligned}$$

Konvülasyon işleminin dağıtma özelliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= 10e^{-3t}u(t) * 2e^{-2t}u(t) - 10e^{-3t}u(t) * e^{-t}u(t) \\ &= 20[e^{-3t}u(t) * e^{-2t}u(t)] - 10[e^{-3t}u(t) * e^{-t}u(t)] \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \frac{20}{-3-(-2)}\,[e^{-3t} - e^{-2t}]u(t) - \frac{10}{-3-(-1)}\,[e^{-3t} - e^{-t}]u(t) \\ &= -20(e^{-3t} - e^{-2t})u(t) + 5(e^{-3t} - e^{-t})u(t) \\ &= (-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})u(t) \end{aligned}$$

Şimdi toplam sistem cevabı yazılabilir.

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$y(t) = \underbrace{(-5e^{-t} + 5e^{-2t})}_{y_{zi}(t)} + \underbrace{(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})}_{y_{zs}(t)} \quad , \quad t \geq 0$$

görüldüğü gibi sıfır-durum cevabı konvülasyon işlemi yapısındadır.

Sistem Toplam Cevabı

Toplam cevap = sıfır – giriş cevabı + sıfır-durum cevabı

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}}_{\text{sifir - giriş}} + \underbrace{f(t) * h(t)}_{\text{sifir - durum}}$$

Sistem Girişi ve Impuls Cevabı Arasındaki Korelasyon

Örneğin sistem girişi $x(t) = e^{-j\beta t}u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-j\beta t}u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulmaya çalışalım. $e^{-\alpha t}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

konvülasyonu gereği

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j\beta\tau}u(\tau)][e^{-j\beta(t-\tau)}u(t-\tau)]\ d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-j\beta\tau} e^{-j\beta(t-\tau)} d\tau = e^{-j\beta t}\int_0^t e^{-j\beta\tau + j\beta\tau} d\tau = e^{-j\beta t}\int_0^t e^{0} d\tau = e^{-j\beta t}\int_0^t d\tau$$

$$= e^{-j\beta t}(\tau)_0^t$$

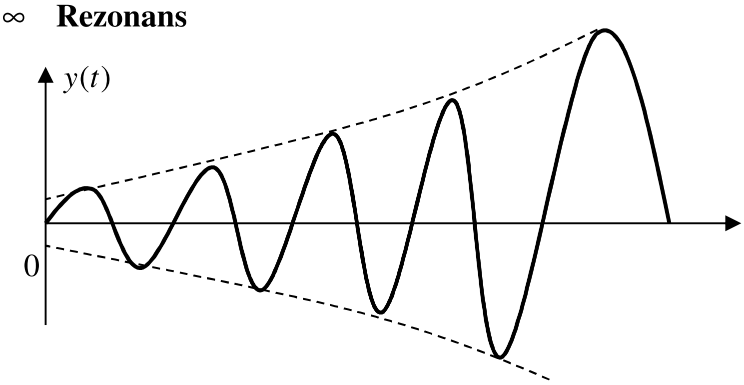
$$= t\, e^{-j\beta t}$$

$$y(t) = t\, e^{-j\beta t}$$

$$\text{Re}\{y(t)\} = \text{Re}\{t\,(\cos\beta t - j\sin\beta t)\} = \text{Re}\{t\cos\beta t - jt\sin\beta t\} = t\cos\beta\, t$$

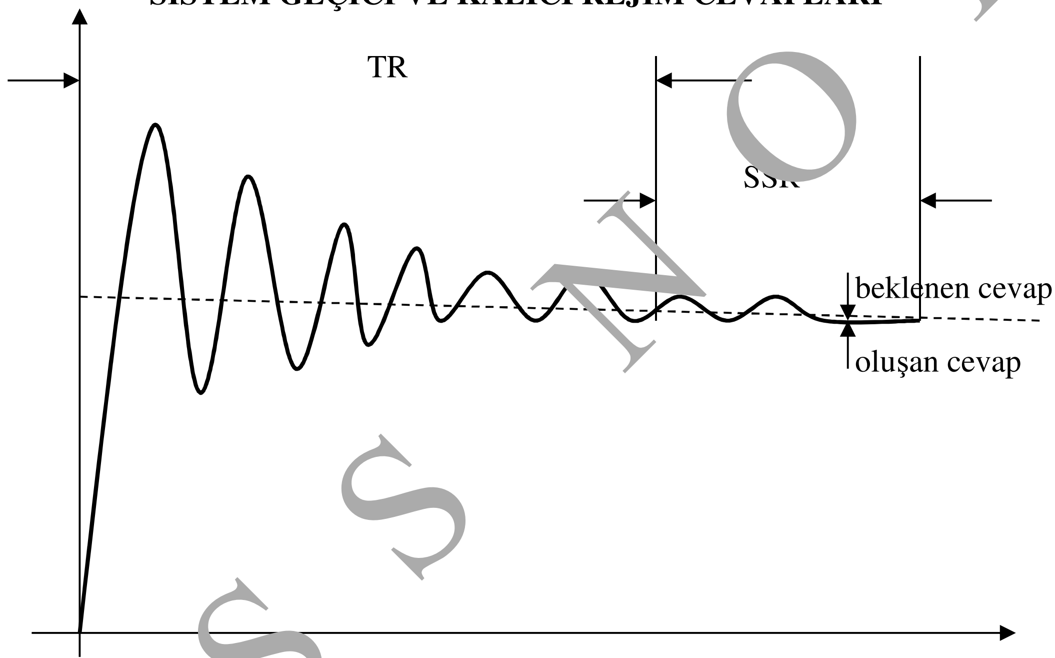
$$y(t) = t\cos\beta\, t$$

$y(t) = t\cos\beta \;\; \underset{t\to\infty}{y(t)} \to \infty$ **Rezonans**



Şekil 10.Rezonans durumu : $y(t) = t\cos\beta\, t$

SİSTEM GEÇİCİ VE KALICI REJİM CEVAPLARI



Şekil 11.Sistem geçici (transient) ve kalıcı (steady-state) cevapları

TR = Transient Response (geçici (hal) sistem cevabı)
SSR = Steady State Response (kalıcı (ha, resjiml) sistem cevabı)

Toplam sistem cevabı = $\underbrace{\textbf{Geçici rejim cevabı}}_{\text{transient response}} + \underbrace{\textbf{Kalıcı rejim cevabı}}_{\text{steady state response}}$

$y_{TR}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} u(t) =$ geçici rejim cevabı

$$y_{SSR}(t) = H(j\omega)\, e^{j\omega t} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} u(t)}_{\text{gecici rejim cevabı}} + \underbrace{H(j\omega)\, e^{j\omega t} u(t)}_{\text{kalici rejim cevabi}}$$

Diferansiyel Denklemlerin Natural ve Zorlanmış Çözümleri

Bu anlamda $y(t)$ sistem çözümü veya cevabı, $y_n(t)$ homojen veya natural çözüm ve $y_p(t)$ zorlanmış çözümlerin toplamından oluşacaktır.

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$
$$Q(D)[y_n(t) + y_p(t)] = P(D)f(t)$$
$$Q(D)y_n(t) + Q(D)y_p(t) = P(D)f(t)$$

$$Q(D)y_n(t) = 0$$

$$Q(D)y_p(t) = P(D)f(t)$$

Zorlanmış Çözüm

Harici sistem girişi genellikle " e^{ς} veya t^r gibi exponensiyel ve polinom tipli ifadeler biçimindedir. Bu tür girişlere karşı sistemin oluşturacağı cevaba zorlanmış cevap (çözüm) denilmektedir.

$$y_p(t) = \beta_2 t^2 \beta_1 t + \beta_0$$
$$Q(D)y_p(t) = P(D)f(t)$$

	Giriş, $f(t)$	**Zorlanmış cevap ,** $y(t)$
1	$e^{\varsigma t}$, $\varsigma \neq \lambda_i (i = 1,2,3,\cdots,n)$	$\beta e^{\varsigma t}$
2	$e^{\varsigma t}$, $\varsigma = \lambda_i (i = 1,2,3,\cdots,n)$	$\beta t e^{\varsigma t}$
3	k	β
4	$\cos(\omega t + \theta)$	$\beta \cos(\omega t + \phi)$
5	$(t^r + \alpha_{r-1} t^{r-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0)$	$(\beta_r t^r + \beta_{r-1} t^{r-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0)\, e^{\varsigma t}$

ς : Girişteki öz değer fonksiyonunun öz değeri

λ_i : Sistem fonksiyonunun öz değeri

$\beta = H(\varsigma) = |H(\varsigma)|\, e^{j\angle H(\varsigma)}$: Girişin öz değer fonksiyonu olması durumundaki sistem kazancı (girişi genlik ve faz olarak ölçekleyen parametre)

Natural – Zorlanmış Çözümlerin Sıfır-Giriş – Sıfır Durum Cevabından Elde Edilmesi

Örneğin daha önce girişi devre gerilimi ($x(t) = v(t)$) ve çıkışı devre akımı ($y(t) = x(t)$) olan *RLC* seri devresinden elde edilen $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y(t) = \dfrac{dx}{dt}$ sisteminin, $(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$ olarak ifade edildiğini, daha sonra bu sistemin $y_0(0) = 0$ ve $\dot{y}_0(0) = -5$ başlangıç koşulları ve $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$ girişine sistemin toplam cevabı,

$$y(t) = \underbrace{(-5e^{-t} + 5e^{-2t})}_{y_{zi}(t)} + \underbrace{(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})}_{y_{zs}(t)} \quad , \quad t \geq 0$$

veya ;

$$y(t) = (-5e^{-t} + 5e^{-2t})u(t) + (-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})u(t)$$

olarak bulunmuştu. Bu denklem göz önüne alınırsa, söz konusu karekteristik modların e^{-t}, e^{-2t} ve e^{-3t} olduklarını görmekteyiz. Bunları toplarsak,

$$y_n(t) = -5e^{-t} - 5e^{-t} + 5e^{-2t} + 20e^{-2t} \quad , \quad t \geq 0$$

$$= -10e^{-t} + 25e^{-2t}$$

$$y_n(t) = -10e^{-t} + 25e^{-2t} - 15e^{-3t} \quad , \quad t \geq 0$$

$$y_f(t) = -15e^{-3t} \quad , \quad t \geq 0$$

$$y(t) = \underbrace{(-10e^{-t} + 25e^{-2t})}_{\text{natural cevap}} + \underbrace{(-15e^{-3t})}_{\text{zorlanmis cevap}} \quad , \quad t \geq 0$$

$$y(t) = (-10e^{-t} + 25e^{-2t})u(t) + (-15e^{-3t})u(t)$$

$$y(t) = (-10e^{-t} + 25e^{-2t} - 15e^{-3t})u(t)$$

Örnek

Sistem denklemi $(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$ ve girişi $f(t) = t^2 + 5t + 3$, ve başlangıç koşulları $y(0^+) = 2$ ve $\dot{y}(0^+) = 3$ olan LTI sistemin tam çözümünü elde edin.

Cevap

Sistemin toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

Görüldüğü gibi sistem girişi ardışık türevlenebilir diferansiyel bir denklemden oluşmaktadır. Böyle bir denklemin karekteristik polinomu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$\lambda_1 = -1 \text{ ve } \lambda_2 = -2$$

Karekteristik modları e^{-t} ve e^{-2t} olacaktır. Natural çözüm bu karekteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} \quad , \quad t \geq 0$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır. Verilen t^2+5t+3 girişi için zorlanmış cevap tablodan görülebilir.

$$y_p(t)=\beta_2 t^2+\beta_1 t+\beta_0$$

Zorlanmış çözüm sistem denklemini sağlayacağından

$$(D^2+3D+2)\,y_\phi(t)=Df(t)$$

$$Dy_\phi(t)=\frac{d}{dt}(\beta_2 t^2+\beta_1 t+\beta_0)=2\beta_2 t+\beta_1$$
$$D^2 y_\phi(t)=\frac{d^2}{dt^2}(\beta_2 t^2+\beta_1 t+\beta_0)=2\beta_2$$
$$Df(t)=\frac{d}{dt}(t^2+5t+3)=2t+5$$

Bütün bulunanlar sistem denkleminde yerine yazılırsa

$$2\beta_2+3(2\beta_2 t+\beta_1)+2(\beta_2 t^2+\beta_1 t+\beta_0)=2t+5$$

biraz daha düzenlenirse,
$$2\beta_2 t^2+(2\beta_1+6\beta_2)t+(2\beta_0+3\beta_1 t+2\beta_2)=2t+5$$

Burada iki taraftan aynı kuvvetlerin eşitliğini yazarsak,

$$2\beta_2=0$$
$$2\beta_1+6\beta_2=2$$
$$2\beta_0+3\beta_1 t+2\beta_2=5$$

Buradan,
$$\beta_0=1\ ,\quad \beta_1=1\ ,\quad \beta_2=0$$

bulunur. Buradan zorlanmış çözüm de

$$y_p(t)=t+1 \qquad , \quad t>0$$

bulunur. Toplam system cevabı ise,

$$\begin{aligned} y(t) &= y_n(t)+y_\phi(t)\\ &=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}+t+1 \qquad , \quad t>0\end{aligned}$$

Buradan başlangıç koşullarına göre türev alınırsa

$$\dot{y}(t)=-K_1e^{-t}-2K_2e^{-2t}+1$$

$t=0$ için

$y(0) = 2 = K_1 + K_2 + 1$

$\dot{y}(0) = 3 = -K_1 - 2K_2$

$1 = K_1 + K_2$

$3 = -K_1 - 2K_2 \;\; \rightarrow \;\; K_1 = 4 \;$ ve $\; K_2 = -3$

Nihai toplam çözüm

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$
$$y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} + t + 1 \qquad , \quad t \geq 0$$

$$y(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})u(t) + (t+1)u(t)$$

Exponensiyel Girişe Sistemin Zorlanmış Cevabı

$$\beta = \frac{Q(\varsigma)}{P(\varsigma)}$$
olduğunu göstereceğiz. β yı bulabilmek için zorlanmış cevap

$$y_p(t) = \beta\, e^{\varsigma t}$$

Örnek

$(D^2 + 3D + 2)\,y(t) = Dx(t)$ ve $y(0^+) = 2$ ve $\dot{y}(0^+) = 3$ başlangıç koşullarına sahip bir LTI sistemin sırasıyla aşağıdaki girişlere olan cevaplarını hesaplayın.

a) $12e^{-5t}$ b) 8

a) Girişin $x(t) = 2e^{-5t}$ tipinde, öz değerin $\varsigma = \sigma \pm j\omega \rightarrow j\omega = 0$ olarak yalnızca reel olması durumunda, zorlanmış çözümde buna uygun davranılacaktır. Sonuçta sistemin toplam cevabı, natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.
$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$

Natural cevap için, sisteme giriş olmayacağından ($f(t) = 0$), $y_p(t) = 0$ olacağından,

$(D^2 + 3D + 2)\,y(t) = Df(t)$ sistem denklemi,
$Q(D) = (D^2 + 3D + 2)\,y(t) = 0$ ve $Q(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

Karekteristik denklemin (polinomun) kökleri,

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -2$

ve karekteristik modları e^{-t} ve e^{-2t} olacaktır. Natural çözüm bu karekteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır. Ancak daha önce zorlanmış çözümü elde etmemiz gerekmektedir.

Özel çözüm :

a) Verilen denklemin sağ tarafına bakıldığında sistemin özel çözümü $y_p(t) = Ae^{-5t}$ ise,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{veya} \quad (D^2 + 3D + 2)\,y(t) = Dx(t)$$

$$(D^2 + 3D + 2)\,y_p(t) = Dx(t)$$

$$x(t) = 12e^{-5\,t}u(t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = -60e^{-5\,t}$$

$$y_p = Ae^{-t} \rightarrow (D^2 + 3D + 2)Ae^{-5\,t} = -60e^{-5\,t}$$

$$D = dy / dt$$

$$DAe^{-5\,t} = -5Ae^{-5\,t} \quad , \quad D^2 Ae^{-5\,t} = 25Ae^{-5\,t}$$

$$D^2(Ae^{-5\,t}) + 3D(Ae^{-5\,t}) + 2Ae^{-5\,t} = 25Ae^{-5\,t} - 15Ae^{-5\,t} + 2Ae^{-5\,t} = -60e^{-5\,t} \rightarrow A = -5$$

$y_p = -5e^{-5\,t}$ Özel çözüm (zorlanmış çözüm)

Pratik yol : $x(t) = 12e^{-5\,t}u(t) = 12e^{\varsigma\,t}u(t)$ Sistem girişindeki öz değer $\varsigma = -5$ olduğundan,

$$(D^2 + 3D + 2)\,y(t) = Dx(t) \rightarrow H(D) = \frac{D}{D^2 + 3D + 2} \quad ,$$

$$H(-5) = 12\frac{P(-5)}{Q(-5)} = 12\frac{-5}{(-5)^2 + 3(-5) + 2} = 12\frac{-5}{25 - 15 + 2} = 12\frac{-5}{12} = -5$$

$$y_p(t) = -5e^{-5}$$

Toplam çözüm

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} - 5\,e^{-5t} \quad , \quad t > 0$$

$$\dot{y}(t) = -K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{-2t} + 25\, e^{-5t} \qquad , \qquad t > 0$$

$$y(0) = 2 = K_1 + K_2 - 5$$

$$\dot{y}(0) = 3 = -K_1 - 2K_2 + 25$$

$$7 = K_1 + K_2$$
$$-22 = K_1 + 2K_2$$

$K_1 = 36$ ve $K_2 = -29$

Nihai toplam çözüm

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = 36e^{-t} - 29e^{-2t} - 5\, e^{-5t} \qquad , \qquad t > 0$$

$$y(t) = (36e^{-t} - 29e^{-2t} - 5\, e^{-5t})u(t)$$

b) Girişin $x(t) = 8$ gibi sabit olması durumunda

Çözüm için sistem toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

Görüldüğü gibi sistem girişi ardışık türevlenebilir diferansiyel bir denklemden oluşmaktadır. Böyle bir denklemin karekteristik polinomu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Karekteristik modlar e^{-t} ve e^{-2t} olacaktır. Natural çözüm bu karekteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır. Girişin $x(t) = 8$ gibi sabit olması durumundaki sistemin cevabı

$$y_p(t) = H(\varsigma)\, e^{\varsigma t}$$

ise, girişin $x(t) = 8 = 8e^{0t}$ olarak düşünülmesi durumunda $\varsigma = 0$ olacağından, aslında sistemin cevabı, $\varsigma = 0$ için,

$$y_p(t) = H(0)\, e^{0\,t} = H(0)$$

olacaktır. Buradan verilen $(D^2+3D+2)\,y(t)=Dx(t)$ sistem fonksiyonundan,

$$H(\varsigma)=\frac{P(\varsigma)}{Q(\varsigma)}=\frac{\varsigma}{\varsigma^2+3\varsigma+2} \quad , \quad H(0)=\frac{0}{(0)^2+3(0)+2}=0$$

$$y_p(t)=H(0)\;e^{0\,t}=H(0)=0$$

Buna göre sistemde zorlanmış çözüm sıfırdır veya mevcut değildir. Bu durumda toplam çözüm yalnızca natural cevaptan oluşacaktır.

Toplam çözüm, $y(t)=y_n(t)+y_p(t)$

$$y(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t} \qquad t>0$$

Başlangıç koşulları uygulandığında,

$$\begin{matrix} y(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t} \\ \dot{y}(t)=-K_1e^{-t}-2K_2e^{-2t} \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} y(0)=2=K_1e^{0}+K_2e^{0} \\ \dot{y}(0)=3=-K_1e^{0}-2K_2e^{0} \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} K_1+K_2=2 \\ -K_1-2K_2=3 \end{matrix} \quad , \; K_1=7 \;,\; K_2=-5$$

bunları aynen yerine yazarsak, toplam çözüm , $y(t)=y_n(t)+y_p(t)$

$$y(t)=7e^{-t}-5e^{-2t} \qquad , \qquad t>0$$

$$y(t)=(7e^{-t}-5e^{-2t})u(t)$$