FOURIER TRANSFORMASYONU

Fourier transformasyonu Fransız matematik ve fizik bilimcisi, Jean Baptista Joseph Fourier in 1822 li yıllarda ortaya koyduğı Fourier teori kapsamında, Fourier serisinden sonra ortaya koyduğu ikinci bölümdür. Fourier transformasyonu üzerine kurulu bu bölüm, bir önceki bölümün devamı olup **periyodik olmayan** dolayısıyla **enerji işaretlerin**, bu anlamda **durağan işaretlerin** (stationary signals) frekans içeriklerini ve özelliklerini analiz etmek üzere geliştirilmiştir. Fourier transformasyonu işaretin frekans domenindeki davranışının incelenmesini mümkün kılarak, işaret hakkında daha sağlıklı bilgilendirme, **özellikle işaretin band sınırlı olup olmadığını belirleyen ve band sınırlı işaretlerin analizlerinde yararlanılan en önemli tekniklerdendir**. Bu anlamda işaretlerin frekans domenindeki davranışını mümkün kılan tekniklere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yüzden böyle bir imkanı sağlayan teknik olarak Fourier serisinin ardından, bu bölümde benzer, hatta daha fazla özellikteki Fourier transformasyonu ele alınacaktır.

Fourier – Ters Fourier Transformasyonu Çiftleri

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$, Fourier transformasyonu

(Rad/sn)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$, invers Fourier transformasyonu

Fourier Transformasyonunda Genlik ve Faz Spektrumu

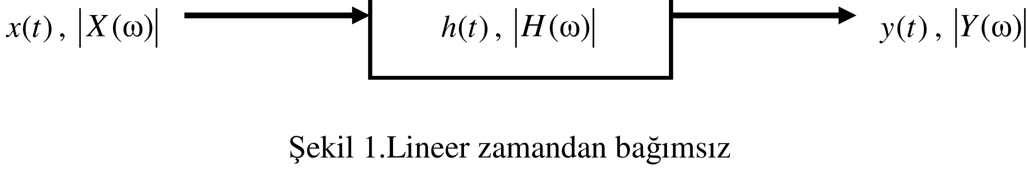
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \rightarrow X(\omega) = \left|X(\omega)\right| e^{j\angle X(\omega)}$$

$\left|X(\omega)\right|$ = Genlik spektrumu (spectral insensity, spectral density) : birimi frekans (Hz) başına düşen desibel volt/mikrovolt veya frekans başına düşen volt/microvolt)

Genlik spektrumu, frekansın genlik dağılımı hakkında bilgi sağlar. İşaretin içerdiği mevcut frekansların genlikleri hakkında bilgi verir.

$\angle X(\omega)$ = Faz spektrumu (fazın yani açının frekansla değişimini verir)

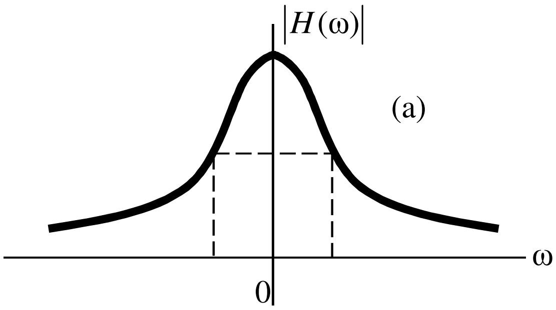
Genlik Spektrumu ve Filtre Özelliği

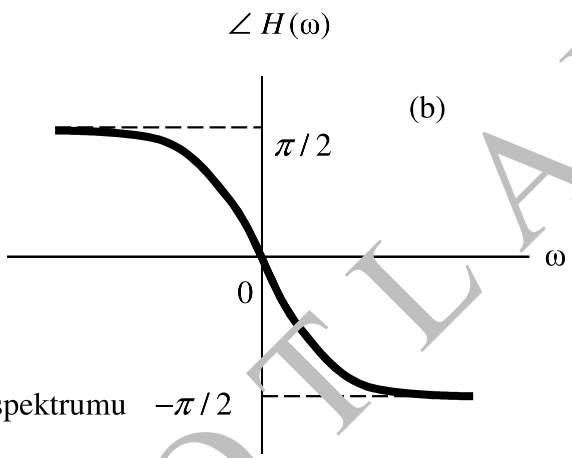


Şekil 1.Lineer zamandan bağımsız

$$H(\omega) = \left|H(\omega)\right| e^{j\angle H(\omega)}$$

$|H(\omega)|$ genlik ve $\angle H(\omega)$ faz spektrumları sistemin nasıl bir sistem, daha doğrusu filtre olarak tasarlandığını açıklayabilir.





Şekil 2.Sistem impuls cevabının genlik ve faz spektrumu

Örnek

$x(t) = x(-t)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\,\omega\, t} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\, e^{-j\,\omega\,(-t)} dt = X(-\omega)$$

$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$ **yansıma özelliği (reflection)**

Örnek

$x(t) = x^{*}(t)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

Eşlenik bir işaretin Fourier transformasyonu istenmektedir.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\,\omega\, t} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^{*}(t)\, e^{-j\,\omega\, t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\,\omega\, t} dt\right]^{*} = X^{*}(-\omega)$$

$x^{*}(t) \leftrightarrow X^{*}(-\omega)$

Örnek

$f(t) = e^{-5t} u(t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t}u(t)\,e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-5t}e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega+5)\,t}dt=-\frac{1}{(j\omega+5)}(e^{-(j\omega+5)\,t})_0^{\infty}$$

$$=-\frac{1}{(j\omega+5)}(e^{-(j\omega+5)\,\infty}-e^{-(j\omega+5)\,0})=-\frac{1}{(j\omega+5)}(e^{-\infty}-e^{0})=-\frac{1}{(j\omega+5)}(\frac{1}{e^{\infty}}-1)=-\frac{1}{(j\omega+5)}(\frac{1}{\infty}-1)$$

$$=-\frac{1}{(j\omega+5)}(0-1)=\frac{1}{(j\omega+5)}$$

$$=\frac{1}{5+j\omega}$$

Kural – 1 : $e^{-a\,t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{a+j\omega}\quad,\qquad a>0$

Kural – 2 : $e^{a\,t}u(-t)\leftrightarrow\dfrac{1}{a-j\omega}\quad,\qquad a>0$

$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{j(t)\omega}d\omega$ olduğundan,

Fourier Transformasyonunun Varlığı

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\,dt<\infty$$

Fourier Transformasyonunun Özellikleri

1. Fourier Transformasyonunun Lineerliği

Fourier transformasyonu toplama ve çarpımsallık (ölçeklenme (scaling)) özelliğini sağladığı için lineer bir transformasyondur. Eğer

$$f_1(t)\leftrightarrow F_1(\omega)\quad \text{ve}\quad f_2(t)\leftrightarrow F_2(\omega)$$

ifadeleri göz önüne alındığında, buradan yazılacak

$$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$$

ifadesiyle lineerliği sağlamaktadır.

2. Simetri

Fourier transformasyonu simetri özelliğine sahiptir. $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ temel özelliğinden hareketle simetri özelliğinde bir işaret çift ve tek fonksiyonların toplamı olarak ifade edilebilmektedir. Çift fonksiyon olma özelliğinden

$f(-t) = f(t)$

ve

$f(-\omega) = f(\omega)$

3. Simetri ve Dualite

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

özelliği mevcut ise

$F(t) \Leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega)$

dualite koşulu olarak anılmaktadır.

Örnek

$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau\ \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ ise

$F\{\tau\ \text{sinc}\left(\frac{\tau\, t}{2}\right)\} = ?$

Çözüm

$F(t) \leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega)$, dualite koşulundan.

$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau\ \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ bilindiğine göre

$\tau\ \text{sinc}\left(\frac{\tau\, t}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi\ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$, ardından $t = -t$

$\tau\ \text{sinc}\left(\frac{\tau\, t}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi\ \text{rect}\left(\frac{(-t)}{\tau}\right) = 2\pi\ \text{rect}\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

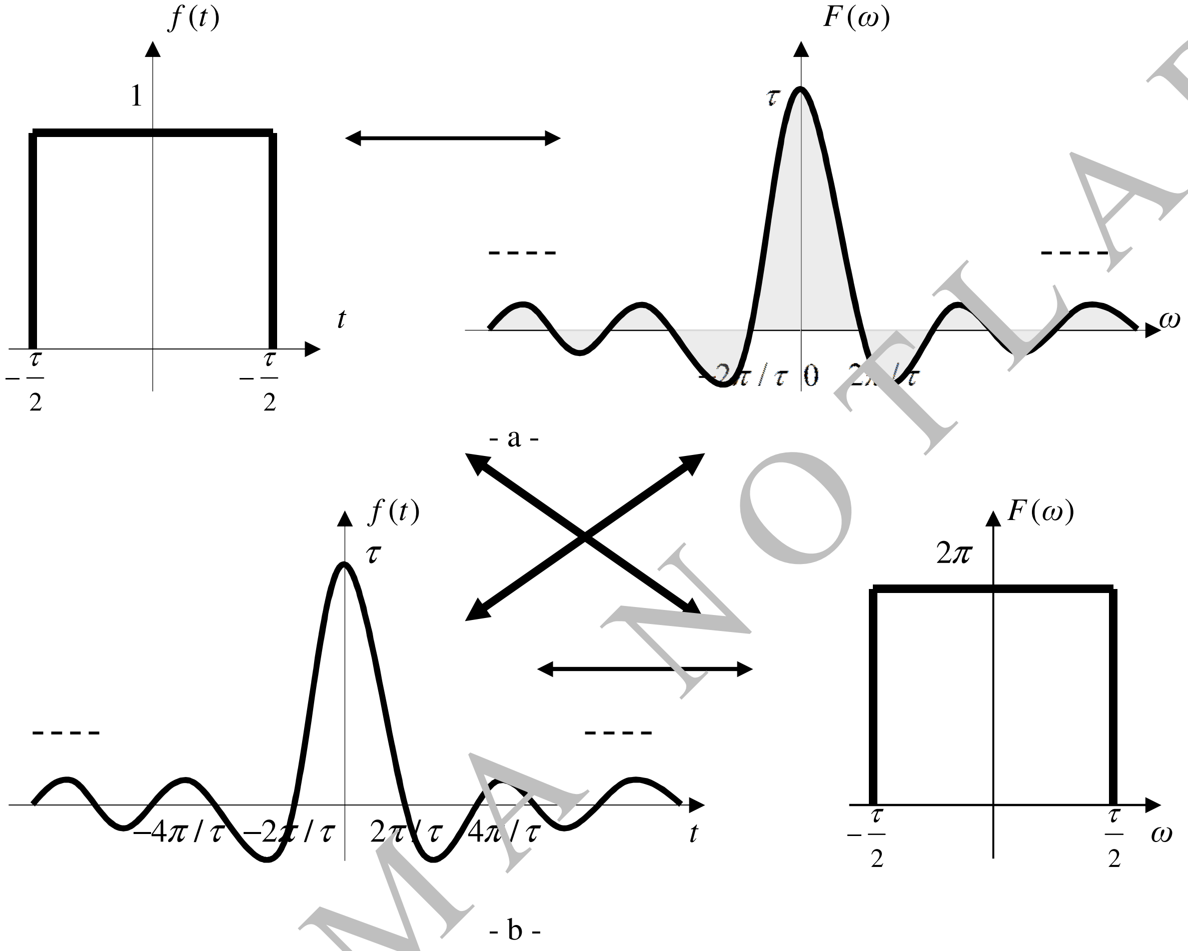
çift fonksiyon özelliğinden $\text{rect}\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$

$\tau\ \text{sinc}\left(\frac{\tau\, t}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi\ \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$

ardından $t = \omega$ alınırsa, nihai fonksiyon

$$\tau \ \mathrm{sinc}\left(\frac{\tau\, t}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi \ \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

olarak sonuçlanır. Verilen $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \ \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ ve bulunan $\tau \ \mathrm{sinc}\left(\frac{\tau\, t}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi \ \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$ ifadelerinin dual özelliği aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3. Fourier transformasyonunun dualite özelliği

Şekilden de görüldüğü gibi (a) da, $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \ \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

(b) de ise $\tau \ \mathrm{sinc}\left(\frac{\tau\, t}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi \ \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$

Örnek

$x(t) = 5\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{4}\right)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

Kural : $\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau\ \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$

Verilen $5\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{4}\right)$ işareti formülden gelen $\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$ ile karşılaştırıldığında, $\tau = 4$

Örnek

$x(t) = 4\Delta\left(\dfrac{t}{20}\right)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

Kural : $\Delta\left(\dfrac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \dfrac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$

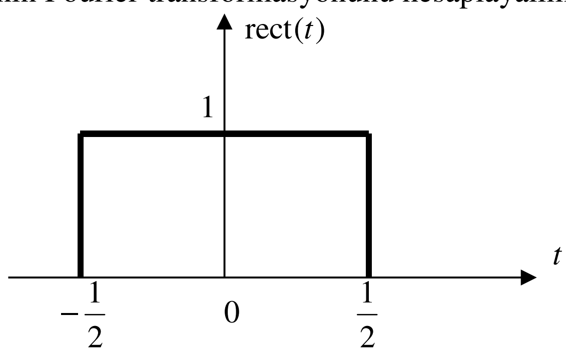
Verilen $4\Delta\left(\dfrac{t}{20}\right)$ işareti formülden gelen $\Delta\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$ ile karşılaştırıldığında, $\tau = 20$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$4\Delta\left(\frac{t}{20}\right) \leftrightarrow 4\frac{20}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega 20}{4}\right) = 40\ \mathrm{sinc}^2(5\omega)$$

Örnek

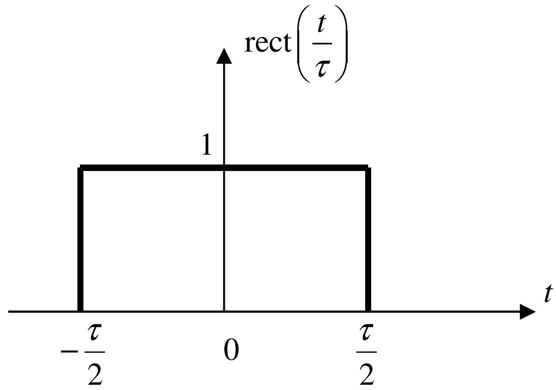
Aşağıda verilmiş dikdörtgenin Fourier transformasyonunu hesaplayalım.



Şekil 4. Darbe işareti

Çözüm

Verilen şeklin değişim aralıkları aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 5. Darbe işareti

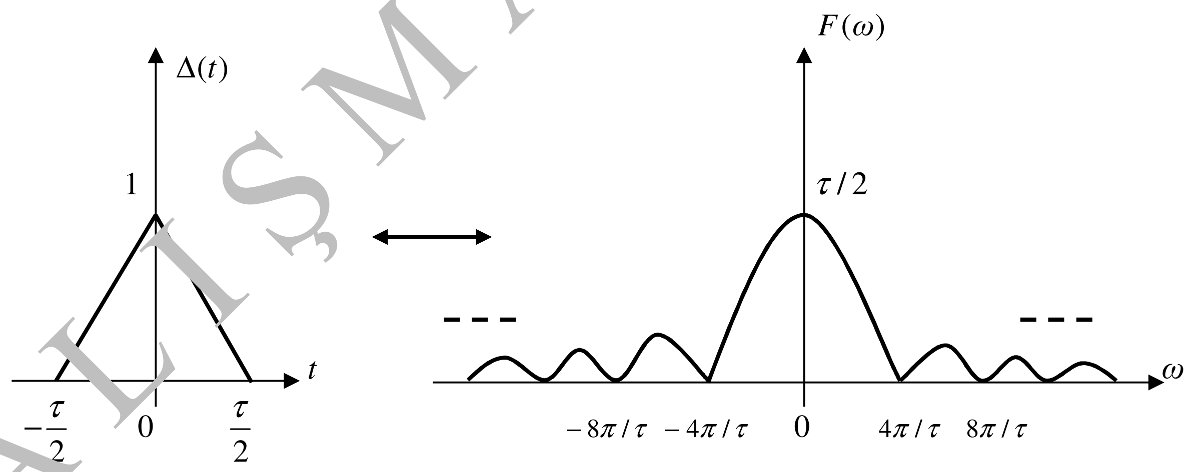
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (1)\, e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\,\tau/2} - e^{-j\omega(-\tau/2)}\right)$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} = \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

$$= \tau\ \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Üçgen Darbenin Fourier Transformasyonu



$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2}\sin c^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

Şekil 6. Zaman limitli işaret ve sonsuz spektrum

Dörtgen ve Üçgen İşaretlerinin Band Genişlikleri

$b\,\text{rect}(\frac{\omega}{4\pi a}) \leftrightarrow 2ab\,\text{sinc}(2\pi a t) \rightarrow BW = a$ Hz

$b\Delta(\frac{\omega}{8\pi a}) \leftrightarrow 2ab\,\text{sinc}^2(2\pi a t) \rightarrow BW = 2a$ Hz

Örnek

$f(t) = \text{sinc}(200\pi t)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu ve band genişliğini bulun.

Çözüm

a) $\text{rect}(\frac{t}{\tau}) \leftrightarrow \tau\ \text{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$ ise,

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$
$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ Dualiti prensibinden verilen işaret düzenlenebilir.

$$\tau\ \text{sinc}(\frac{t\ \tau}{2}) \leftrightarrow 2\pi\ \text{rect}(-\frac{\omega}{\tau}) = 2\pi\ \text{rect}(\frac{\omega}{\tau})$$

$$\tau\ \text{sinc}(\frac{t\ \tau}{2}) \leftrightarrow 2\pi\ \text{rect}(\frac{\omega}{\tau})$$

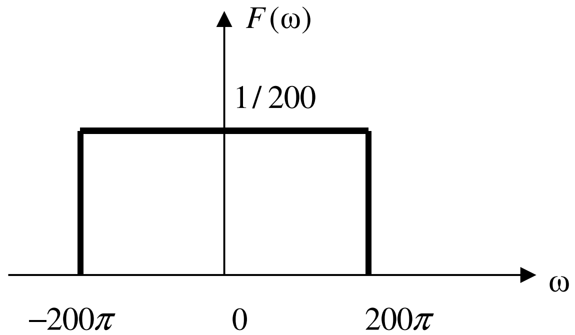
$f(t) = \text{sinc}(200t)$ İşareti $\tau\ \text{sinc}(\frac{t\ \tau}{2}) \leftrightarrow 2\pi\ \text{rect}(\frac{\omega}{\tau})$ ile düşünüldüğünde,

$$\frac{\tau}{2} = 200\pi \rightarrow \tau = 400\pi$$

$$400\pi\ \text{sinc}(\frac{t\ 400\pi}{2}) \leftrightarrow 2\pi\ \text{rect}(\frac{\omega}{400\pi}) \rightarrow \text{sinc}(\frac{t\ 400\pi}{2}) \leftrightarrow \frac{2\pi}{400\pi}\text{rect}(\frac{\omega}{400\pi})$$

$$\text{sinc}(200\pi\ t) \leftrightarrow \frac{1}{200}\text{rect}(\frac{\omega}{400\pi})$$

Bu ifadeye göre şekil aşağıdaki gibi düzenlenir.



Şekil 7. Darbe işareti : $F(\omega) = \frac{1}{200}\text{rect}(\frac{\omega}{400\pi})$

b) Bu şekliyle genişliği 1/100 sn olan olan $f(t) = \text{sinc}(200\pi\ t)$ işaretinin band genişliğinin $F(\omega)$ görünümünden, $200\pi = 2\pi f \rightarrow f = 100$ Hz olduğu görülür.

Örnek

$f(t) = \mathrm{sinc}^2(200\pi t)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu ve band genişliğini bulun.

Çözüm

a) $\Delta(\frac{t}{\tau}) \leftrightarrow \frac{\tau}{2}\ \mathrm{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{4})$ ise,

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$
$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ Dualite prensibinden verilen işaret düzenlenebilir.

$$\frac{\tau}{2}\ \mathrm{sinc}^2(\frac{t\ \tau}{4}) \leftrightarrow 2\pi\ \Delta(-\frac{\omega}{\tau}) = 2\pi\ \Delta(\frac{\omega}{\tau})$$

$$\frac{\tau}{2}\ \mathrm{sinc}^2(\frac{t\ \tau}{4}) \leftrightarrow 2\pi\ \Delta(\frac{\omega}{\tau})$$

$f(t) = \mathrm{sinc}^2(200\pi t)$ İşareti $\frac{\tau}{2}\ \mathrm{sinc}^2(\frac{t\ \tau}{4}) \leftrightarrow 2\pi\ \Delta(\frac{\omega}{\tau})$ ile düşünüldüğünde,

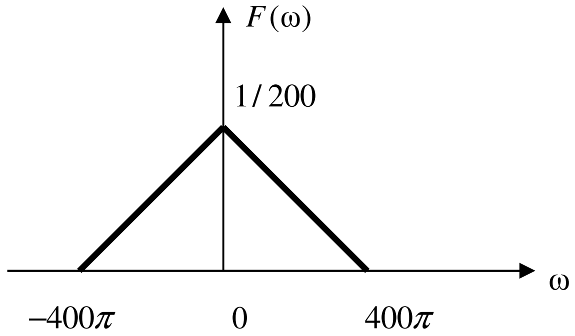
$$\frac{\tau}{4} = 200\pi \rightarrow \tau = 800\pi$$

$$\frac{800\pi}{2}\mathrm{sinc}^2(\frac{t\ 800\pi}{4}) \leftrightarrow 2\pi\ \Delta(\frac{\omega}{800\pi}) \rightarrow 400\pi\mathrm{sinc}^2(200\pi\ t) \leftrightarrow 2\pi\ \Delta(\frac{\omega}{800\pi})$$

$$\mathrm{sinc}^2(200\pi\ t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{400\pi}\Delta(\frac{\omega}{800\pi}) = \mathrm{sinc}^2(200\pi\ t) \leftrightarrow \frac{1}{200}\Delta(\frac{\omega}{800\pi})$$

$$\mathrm{sinc}^2(200\pi\ t) \leftrightarrow \frac{1}{200}\Delta(\frac{\omega}{800\pi})$$

Bu ifadeye göre şekil aşağıdaki gibi düzenlenir.



Şekil 8. Darbe işareti : $F(\omega) = \frac{1}{200}\Delta(\frac{\omega}{800\pi})$

b) Bu şekliyle genişliği 1/200 sn olan olan $f(t) = \mathrm{sinc}^2(200\pi\ t)$ işaretinin band genişliğinin $F(\omega)$ görünümünden, $400\pi = 2\pi f \rightarrow f = 200$ Hz olduğu görülür.

Bazı Özel Fonksiyonların Fourier Transformasyonları

Bu bölümde bazı çok bilinen fonksiyonların Fourier ve invers Fourier transformasyonları tanıtılacaktır.

Örnek

$f(t) = \delta(t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayınız.

Çözüm

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t} dt = \delta(0)\, e^{-j\omega 0}$$
$$= 1$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

Örnek

$F(\omega) = \delta(\omega)$ ile verilen Fourier transformasyonunun inversini bulunuz.

Çözüm

$$f(t) = F^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(t) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)(t) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\delta(0)(t) e^{j0t}$$
$$= \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{1}{2\pi} \leftrightarrow \delta(\omega)$$

veya ;

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

Örnek

$f(t) = 1$ işaretinin Fourier transformasyonunu bulunuz.

Çözüm

Daha önce $\delta(\omega)$ nin invers Fourier transformasyonunu $\frac{1}{2\pi}$ olarak bulmuştuk

$F^{-1}(\delta(\omega)) = 1/2\pi$.

Fourier ve invers Fourier transformasyonları arasında karşılıklı dönüşüm özelliği $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ olduğundan buna göre,

$$\frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow \delta(\omega)$$

yazabiliriz. Buradan da

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$$

bulunur. Sonuçta "1" in Fourier transformasyonu

$$F\{1\} = 2\pi\,\delta(\omega)$$

veya, önceki örnekte açıklandığı gibi f (hz) olarak, ifadenin 2π ye bölünmesi yeterli olacaktır.

$$1 \leftrightarrow \delta(f)$$

Örnek

$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ ile verilen Fourier transformasyonunun inversini bulunuz.

Çözüm

$$f(t) = \{F(\omega)\}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(t)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\; e^{j\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

veya

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Örnek

$F(\omega) = \delta(\omega + \omega_0)$ ile verilen Fourier transformasyonunun inversini bulunuz.

Çözüm

$$f(t) = \{F(\omega)\}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(t)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0)e^{j\omega t}d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\; e^{-j\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{2\pi}e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \delta(\omega + \omega_0)$$

veya

$$e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Örnek

$F(\omega) = \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)$ ile verilen Fourier transformasyonunun inversini bulunuz.

Çözüm

$$f(t) = \{F(\omega)\}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(t)e^{j\,\omega\,t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right]e^{j\,\omega\,t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega + \omega_0)e^{j\,\omega\,t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \omega_0)e^{j\,\omega\,t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-j\,\omega_0\,t} + \frac{1}{2\pi}e^{j\,\omega_0\,t} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{j\,\omega_0\,t} + e^{-j\,\omega_0\,t}}{2}\right] = \frac{1}{\pi}\cos\omega_0 t = \frac{\cos\omega_0 t}{\pi}$$

$$\frac{\cos\omega_0\ t}{\pi} \leftrightarrow \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)$$

veya

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right]$$

Örnek

$f(t) = e^{j\,\omega_0\,t}$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\,\omega_0\,t}e^{-j\,\omega\,t}dt = ?$$

Daha önce $\delta(\omega - \omega_0)$ nin invers Fourier transformasyonunu $\frac{1}{2\pi}\ e^{j\,\omega_0\,t}$ olarak bulmuştuk

$$F^{-1}(\delta(\omega - \omega_0)) = \frac{1}{2\pi}\ e^{j\,\omega_0\,t}$$

Fourier ve invers Fourier transformasyonları arasında karşılıklı dönüşüm özelliği
$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ olduğuna göre,

$$\frac{1}{2\pi}\ e^{j\,\omega_0\,t}\ \Leftrightarrow\ \delta(\omega - \omega_0)$$

yazabiliriz. Buradan da

$$e^{j\,\omega_0} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

bulunur. Sonuçta "$e^{j\,\omega_0\,t}$" in Fourier transformasyonu

$$F(\omega) = 2\pi\ \delta(\omega - \omega_0)$$

veya ;

$$e^{j\,\omega_0\,t}\ \Leftrightarrow\ 2\pi\ \delta(\omega - \omega_0)$$

olarak bulunur. Ayrıca eğer $e^{j\,\omega_0\,t}$ yerine $e^{-j\,\omega_0\,t}$ alınsa bu kez Fourier transformasyonu

$$F(\omega) = 2\pi\, \delta(\omega - (-\omega_0))$$
$$= 2\pi\, \delta(\omega + \omega_0)$$

Periyodik İşaretin Fourier Transformasyonu

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j n \omega_0 t}$$

Fourier serisinin ardından bu işaretin frekans analizini Fourier transformasyonuyla da yapabiliriz. Bunun için işaretin Fourier transformasyonunu alalım.

$$F\{x(t)\} = X(\omega) = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j n \omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n F\left\{e^{j n \omega_0 t}\right\}$$

Kural : $F\left\{e^{j n \omega_0 t}\right\} = 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(\omega - n\omega_0) \ , \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} X(\omega) = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} X(n\frac{2\pi}{T_0})$$

Örnek

$f(t) = \cos\omega_0 t$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega_0 t\, e^{-j\omega t} dt = ?$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$ **Euler denklemi**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega_0 t\, e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\, e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\,]\, e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} + e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt$$

Daha önceki örnekten biliyoruz ki,

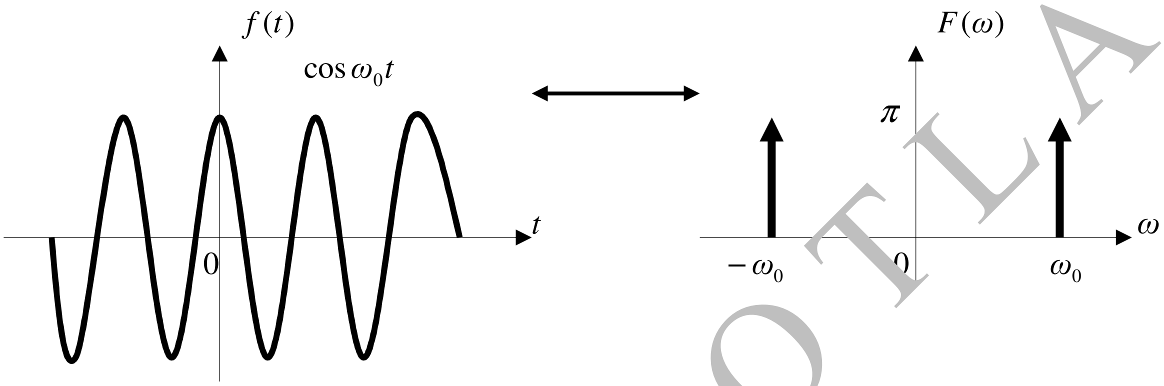
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\, \delta(\omega + \omega_0)$$

Yukarıdaki ifade de yerlerine yazılırsa,

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\left[2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)+2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\right]$$
$$=\pi\,\delta(\omega+\omega_0)+\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

$$f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\cos\omega_0 t\Leftrightarrow\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$



Şekil 9. $f(t)=\cos\omega_0 t$ ve Fourier Transformasyonu

Örnek

$f(t)=\sin\omega_0 t$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega_0 t\, e^{-j\omega t}dt=?$$

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t})$$ **Euler denklemi**

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega_0 t\,e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}]\,e^{-j\omega t}dt$$
$$=\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-j(\omega-\omega_0)t}-e^{-j(\omega+\omega_0)t}]\,dt=\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-j(\omega-\omega_0)t}-e^{-j(\omega+\omega_0)t}]\,dt$$
$$=-\frac{j}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-j(\omega-\omega_0)t}-e^{-j(\omega+\omega_0)t}]\,dt=-\frac{j}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt+\frac{j}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt$$
$$=\frac{j}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt-\frac{j}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

Benzer şekilde önceki bilgilerimizden

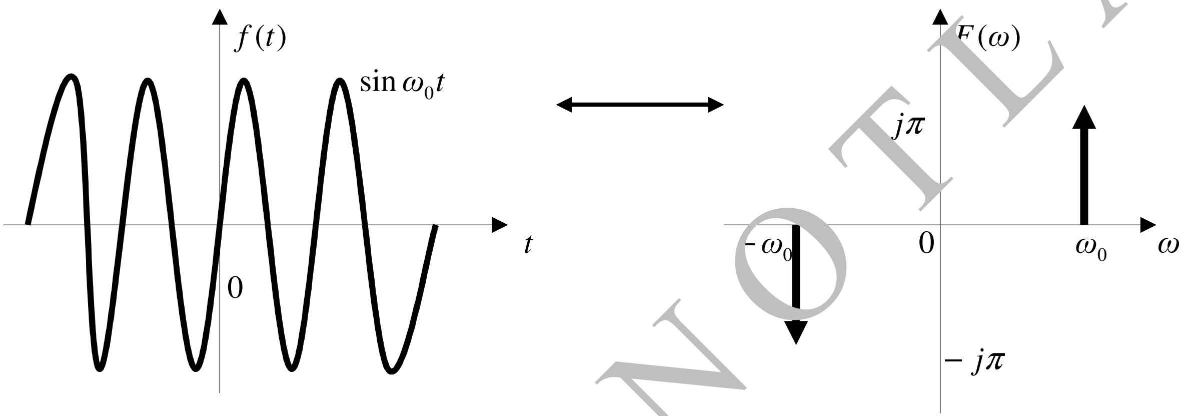
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt=2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

Yukarıdaki ifade de yerlerine yazılırsa,

$$F(\omega) = \frac{j}{2}\left[2\pi\,\delta(\omega+\omega_0) - 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\right]$$
$$= j\pi[\,\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\sin\omega_0 t \Leftrightarrow j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right]$$



Şekil 108. $f(t) = \sin\omega_0 t$ ve Fourier Transformasyonu

Görüldüğü gibi, $\sin\omega_0 t$ tek fonksiyon olduğu için aynı genlikte ama $-\omega_0$ ve ω_0 için farklı fazlarda oluşmaktadır.

Örnek

$f(t)\cos\omega_0 t$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

İki işaretin çarpımıyla oluşan modülasyon ifadesinin Fourier transformasyonu istenmektedir.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega_0 t\; e^{-j\,\omega\,t}dt = ?$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\,\omega_0 t} + e^{-j\,\omega_0 t})$$ **Euler denklemi**

$$x(t) = \cos\omega_0 t \rightarrow F\left\{x(t)\right\} = \pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$f(t)x(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \left[\pi\delta(\omega+\omega_0) + \pi\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \pi\delta(\tau+\omega_0)F(\omega-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \pi\delta(\tau+\omega_0)F(\omega-\tau)d\tau\right]$$

$$= \frac{\pi}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau+\omega_0)F(\omega-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-\omega_0)F(\omega-\tau)d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(\omega-(-\omega_0)) + F(\omega-\omega_0)\right] = \frac{1}{2}\left[F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)\right]$$

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)\right]$$

Örnek

LTI sisteme ait $h(t) = e^{-9t}u(t)$ impuls cevabının Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

Verilen LTI sistemin impuls cevabının ,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

olarak Fourier transformasyonunu alabilmek için öncelikle verilen işaretin Fourier transformasyonunun var olma koşulu olan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

ifadesinin sağlanması gerekir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-9t}u(t)\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-9t}u(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-9t}\, dt = -\frac{1}{9}(e^{-9t})_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{9}(e^{-\infty} - e^{0}) = -\frac{1}{9}(\frac{1}{e^{\infty}} - 1) = -\frac{1}{9}(\frac{1}{\infty} - 1) = -\frac{1}{9}(0-1)$$

$$= \frac{1}{9} < \infty$$

$$= \textbf{Fourier transformasyonu var}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \frac{1}{9}$ olarak sonlu değer oluşturarak $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ koşulunu sağladığından, verilen fonksiyonun Fourier transformasyonu mevcuttur. Bu koşul aynı zamanda verilen bir işaretin tam veya asimtotik kararlı olması anlamınada gelmektedir.

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-j\,\omega\,t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-9t}u(t)\,e^{-j\,\omega\,t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-9t}e^{-j\,\omega\,t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(j\,\omega+9)\ t}dt$$

$$=-\frac{1}{(j\omega+5)}(e^{-(j\,\omega+9)\ t})_0^{\infty}=-\frac{1}{(j\omega+9)}(e^{-(j\omega+9)\ \infty}-e^{-(j\omega+9)\ 0})=-\frac{1}{(j\omega+9)}(e^{-\infty}-e^{0})$$

$$=-\frac{1}{(j\omega+9)}(\frac{1}{e^{\infty}}-1)=-\frac{1}{(j\omega+9)}(\frac{1}{\infty}-1)=-\frac{1}{(j\omega+9)}(0-1)=\frac{1}{(j\omega+9)}$$

$$=\frac{1}{j\omega+9}$$

Sonuç : $h(t)=e^{-9t}u(t)$ sistem işaretinin Fourier transformasyonu var ve asimtotik kararlı.

Örnek

Sistemin çözümü $a<0$ ve $a>0$ için araştırılmalıdır. İşe $h(t)=e^{a\,t}u(t)$ LTI sistem impuls cevabının Fourier transformasyonunu ele alarak başlayabiliriz.

Çözüm

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-j\,\omega\,t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{a\,t}u(t)e^{-j\,\omega\,t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{(a-j\,\omega)\,t}dt=\frac{1}{j(a-\omega)}e^{(a-\mathrm{j}\omega)\,t}\,|_0^{\infty}$$

1. $a<0$ **için**

$$H(\omega)=\int_{0}^{\infty} e^{\,(-a-j\,\omega)\,t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\,\omega)\,t}dt=-\frac{1}{(\,a+j\omega)}e^{-(a+j\,\omega)\,t}\,|_0^{\infty}$$

$$=-\frac{1}{(\,a+j\omega)}e^{-(a+j\,\omega)\,\infty}+\frac{1}{(\,a+j\omega)}e^{-(a+j\,\omega)\,0}=-\frac{1}{(\,a+j\omega)}(e^{-\infty}-e^{\,0})=-\frac{1}{(\,a+j\omega)}(\frac{1}{e^{\infty}}-1)$$

$$=-\frac{1}{(\,a+j\omega)}(\frac{1}{\infty}-1)=-\frac{1}{(\,a+j\omega)}(0-1)$$

$$=\frac{1}{(\,a+j\omega)}$$

$h(t)=e^{a\,t}u(t)$ işaretinin $a<0$ için $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt<\infty$ **<u>Fourier transformasyonu mevcut ve Fourier transformasyonu alınabilir</u>** ; $H(\omega)=\dfrac{1}{j(\,a-\omega)}$

2. $a>0$ **için,**

$h(t)=e^{a\,t}u(t)$ işaretinin $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt<\infty$ Fourier transformasyonunun var olabilmesi araştırılmalıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{a\,t} u(t)\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a\,t} u(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{a\,t}\, dt = \frac{1}{a}(e^{a\,t})_{0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{a}(e^{\infty} - e^{0}) = \frac{1}{a}(\infty - 1)$$
$$= \infty$$
$$= \textbf{Fourier transformasyonu yok}$$

$h(t) = e^{a\,t} u(t)$ işaretinin $a > 0$ için $\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right| dt < \infty$ Fourier transformasyonu **mevcut olmadığından Fourier transformasyonu alınamaz** ;

$H(\omega) =$ **Yok**

Bu tip sorunlar Fourier transformasyonunun daha genel hali olan $H(s)$ **Laplace transformasyonuyla giderilir**.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-s\,t} dt$$

Şekil 77. Genliği monoton azalan kararlı sinusoid işarete sahip sistem

Fourier Transformasyonunun Özellikleri

Ölçekleme Özelliği : $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$f(at)$ = zaman domeninde sıkışma (compressing),

$F(\frac{\omega}{a}) =$ frekans domeninde genleşme (expanding)

Zaman Öteleme Özelliği:

" *time-shifting*" olarak bilinen bu durumda işaretin zaman olarak ötelenmesi işaret işlemede ve özellikle haberleşme sistemlerinde önemli bir kavramdır.

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

Bu şekliyle "**distorsiyonsuz iletim** " özelliği ile örtüştüğü için, zaman kaydırmalı (ötelemeli veya gecikmeli) sistemler genel, özellikle de haberleşme sistemleri için önemlidir.

Fourier Transformasyonunda Zaman Integrali

Zaman domenindeki herhangi bir fonksiyonun integralinin Fourier transformasyonu alınmaktadır.

$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \;\; \leftrightarrow \;\; \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\, \delta(\omega)$$

$$F\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right\} \leftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$$

Fourier Transformasyonunda Frekans Türevi

Frekans domeninde Fourier transformasyonu alınmış herhangi bir fonksiyonun türevinin, zaman domenindeki karşılığı hesaplanmaktadır.

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$\frac{d}{d\omega} X(\omega) \leftrightarrow F\{-j\, t\, x(t)\}$$

$$j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega) \leftrightarrow F\{t^n x(t)\}$$

Zaman ve Frekans Domenlerinde Konvülasyon Özelliği

Zaman domenindeki konvülasyon prosesi, frekans domenindeki çarpma işlemine denktir.

1) $\mathbf{x(t) * h(t) \leftrightarrow X(\omega)H(\omega)}$

2) Zaman Domeninde Çarpma : $j\omega$ **Düzleminde Modülasyon :** $\mathbf{x(t)h(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * H(\omega)}$

Örnek

$x(t) = e^{-3t}u(t)$, $h(t) = e^{-7t}u(t)$ ise, $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ ifadesinden $y(t)$ 'i hesaplayın.

Çözüm

Frekans domenindeki çarpmanın karşılığının zaman domenindeki konvülüsyon işlemi olduğu kuralını hatırlıyoruz.

Kural : $\mathbf{x(t) * h(t) \leftrightarrow X(\omega)H(\omega)}$

Buna göre istenen frekans domenindeki konvülüsyonu yaptığımızda,

Kural : $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\ d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3\tau}u(\tau)e^{-7(t-\tau)}u(t-\tau)\ d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3\tau}\underbrace{u(\tau)}_{\tau=0}e^{-7(t-\tau)}\underbrace{u(t-\tau)}_{\tau=t}\ d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-3\tau}e^{7\tau}e^{-7t}d\tau=e^{-7t}\int_{0}^{t}e^{-3\tau+7\tau}d\tau=e^{-7t}\int_{0}^{t}e^{4\tau}d\tau=\frac{1}{4}\left[e^{4\tau}\right]_{0}^{t}=\frac{e^{-7t}}{4}\left[e^{4t}-e^{0}\right]=\frac{e^{-7t}}{4}\left[e^{4t}-1\right]$$

$$=\frac{e^{-7t+4t}-e^{-7t}}{4}=\frac{e^{-3t}-e^{-7t}}{4}=\frac{1}{4}\left[e^{-3t}-e^{-7t}\right]$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\frac{1}{4}\left[e^{-3t}-e^{-7t}\right]u(t)$$

sonucuna ulaşmış olacağız. Bir anlamda bunu ispatlamaya çalışıyoruz. Bunun için her bir fonksiyonun Fourier transformasyonunu hatırlayalım,

Kural : $e^{-a\,t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{j\omega+a}$

$$x(t)=e^{-3t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega+3}=X(\omega)$$

$$h(t)=e^{-7t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega+7}=H(\omega)$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\frac{1}{j\omega+3}\ \frac{1}{j\omega+7}=\frac{1}{(j\omega+3)(j\omega+7)}=\frac{A}{j\omega+3}+\frac{B}{j\omega+7}=\frac{j\omega A+7A+j\omega B+3B}{(j\omega+3)(j\omega+7)}$$

$$=\frac{j\omega(A+B)+7A+3B}{(j\omega+3)(j\omega+7)}$$

$$\begin{matrix}A+B=0\\7A+3B=1\end{matrix}\quad\rightarrow\quad A=\frac{1}{4}\ ,\ B=-\frac{1}{4}$$

$$Y(\omega)=\frac{\frac{1}{4}}{j\omega+3}+\frac{-\frac{1}{4}}{j\omega+7}=\frac{1}{4}\frac{1}{j\omega+3}-\frac{1}{4}\frac{1}{j\omega+7}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{j\omega+3}-\frac{1}{j\omega+7}\right]$$

$$y(t)=F^{-1}\left\{Y(\omega)\right\}=F^{-1}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{j\omega+3}-\frac{1}{j\omega+7}\right]\right\}=\frac{1}{4}F^{-1}\left\{\left[\frac{1}{j\omega+3}-\frac{1}{j\omega+7}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}F^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+3}\right\}-\frac{1}{4}F^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+7}\right\}=\frac{1}{4}e^{-3t}u(t)-\frac{1}{4}e^{-7t}u(t)$$

$$y(t)=\frac{1}{4}\left[e^{-3t}-e^{-7t}\right]u(t)=e^{-3t}*e^{-7t}$$

Neticede , $x(t)*h(t)\leftrightarrow X(\omega)H(\omega)$ kuralının sağ tarafından, sol tarafının elde edilmesi teyit edilmiştir.

$$Y(\omega)=\left[\frac{1}{j\omega+3}\right]\left[\frac{1}{j\omega+7}\right]\leftrightarrow\frac{1}{4}\left[e^{-3t}-e^{-7t}\right]u(t)=y(t)$$