FREKAN CEVABI : SİSTEM ve SPEKTRAL ENERJİ – GÜÇ YOĞUNLUĞU

Sinyal ve sinyalin temsil edildiği sistemin enerjisinin Fourier transformasyonuyla ifade edilebilen frekans domenindeki karşılığı oldukça önemlidir.Sinyalin tipini ve ardından Fourier dönüşümüyle band genişliğine erişebilmemiz yalnızca sinyalin kendisiyle alakalı değil, aynı zamanda sinyalin kullanılacağı sistemin frekans içeriği, dolayısıyla sistemin band genişliği hakkında bilgi sağlamaktadır.

Periyodik Olmayan İşaretin Enerjisi

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega$$ **Parseval's teoremi**

Spektral Enerji Yoğunluğu : Periyodik Olmayan İşaretin Enerjisi

Periyodik olmayan bir işaretin E_f olan enerjisi daha önceden

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt$$

Bu ifadeyi $f(t)$ işaretini kompleks kabul ederek frekansa bağlı spektrum üzerinde yazarsak,

$$\begin{aligned}
E_f &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)\, e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \right]}_{F(\omega)} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega)\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega
\end{aligned}$$

$\left| F(\omega) \right|^2 =$ **birim band başına düşen spektral enerji yoğunluğu**

Enerji Spektral Yoğunluğunun Otokorelasyon Fonksiyonuyla Elde Edilmesi

Şimdi periyodik olmayan herhangi bir işaretin enerjisini otokorelasyon fonksiyonu yardımıyla oluşturmaya çalışacağız. Eğer enerji işareti $f(t)$ ise $R_f(\tau)$ otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilmekteydi.

$$R_f(\tau) = f(\tau) * f(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t-\tau) dt$$

Eğer $f(t)$ kompleks işaret ise, $f(-\tau) = f^*(\tau)$ olacağından bu durumda,

$$R_f(\tau) = f(\tau) * f(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t-\tau) dt$$

Eğer otokorelasyon fonksiyonu işaretin enerjisini oluşturabiliyorsa,

$$F\{f(\tau) * f(-\tau)\} = F\{f(\tau) * f^*(\tau)\} = F(\omega) F^*(\omega) = |F(\omega)|^2$$
$$= F\{R_f(\tau)\}$$

Buradan otokorelasyon fonksiyonunun Fourier transformasyonu, işaretin spektral enerji yoğunluğunu oluşturmaktadır.

$$R_f(\tau) \leftrightarrow S(\omega)$$

$S(\omega) = |F(\omega)|^2$ **Enerji spektral yoğunluğu**

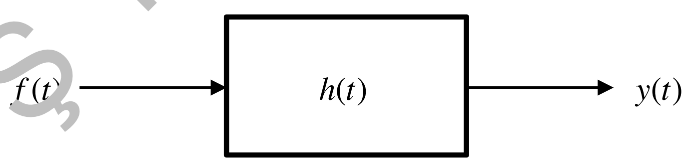
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \text{veya} \quad R_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$S(\omega) = |X(\omega)|^2$$

$$R(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = |X(\omega)|^2$$

Güç İşaretinin Lineer Zamandan Bağımsız Sistemden İletimi

İmpuls cevabı $h(t)$ olan lineer zamandan bağımsız (LTI) bir kanaldan veya filtreden $f(t)$ gibi bir güç işaretinin iletimini ele almak istiyoruz. Böyle bir sistemin $y(t)$ çıkışını hesaplamaya çalışalım.



Şekil 1. LTI sistem

Sistem cevabını konvülüsyon yaklaşımıyla hesaplayalım.

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Ayrıca çıkışın güç spektral yoğunluğuda yazılabilir.

$$R_y(\tau) = y(\tau) * y(-\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) y^*(t-\tau) dt$$

$$F\{y(\tau) = f(\tau) * h(\tau)\} = F(\omega)H(\omega)$$
$$= Y(\omega)$$

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

$$|Y(\omega)|^2 = |F(\omega)|^2 \, |H(\omega)|^2$$

$|Y(\omega)|^2 =$ sistem çıkışının güç spektral yoğunluğu

$|F(\omega)|^2 =$ sistem girişinin güç spektral yoğunluğu

$$S_x(\omega) \longrightarrow \boxed{|H(\omega)|^2} \longrightarrow S_y(\omega)$$

Şekil 2. LTI Sistemin güç spektral yoğunluğu

Örnek

$x(t) = A$ İşaretinin,

a) otokorelasyonunu,.
b) güç spektral yoğunluğunu,
c) gücünü hesaplayın.

Çözüm

Görünen o ki, sabit bir A sayısının otokorelasyonu, güç spektral yoğunluğu ve toplam gücü/enerjisi isteniyor.

a)
$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(\tau+t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A\, A dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} [t]_{-T/2}^{T/2}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T}\left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T}\left[\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} T = A^2$$

$$R(\tau) = A^2$$

b) $R(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = |X(\omega)|^2$

$$R(\tau) = A^2 \leftrightarrow 2\pi A^2 \delta(\omega) = S(\omega) = |X(\omega)|^2$$

c) $P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega = P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi A^2 \delta(\omega)d\omega = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)d\omega = A^2$

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır kabul edilen $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$ diferansiyel denklem sistemiyle verilen LTI sistemin

a) Impuls cevabını elde edin,
b) $x(t)=e^{-3t}u(t)$ girişi için sistem cevabını elde edin.

Çözüm

a) Sistem diferansiyel denklem ile verilmiş ise transfer fonksiyonu frekans domeninde elde edilmelidir. Frekans domeni olarak Fourier, Laplace veya Z transformasyonlarından biri gerekmektedir. Verilen örneğimizi Fourier transformasyonuna uygun olarak $j\omega$ domeninde değerlendirerek, öncelikle transfer fonksiyonunu verilen diferansiyel denklemden $H(j\omega)$ veya $H(\omega)$ formunda elde ederek, daha sonta ters Fourier transformasyonundan $h(t)$ impuls cevabı elde edilmeye çalışılacaktır. Eğer,

$$\frac{d^2y(t)}{dt}=(j\omega)^2Y(j\omega)$$
$$\frac{dy(t)}{dt}=j\omega Y(j\omega) \qquad \text{ve} \qquad \frac{dx(t)}{dt}=j\omega X(j\omega)$$
$$y(t)=Y(j\omega) \qquad x(t)=X(j\omega)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=j\omega Y(j\omega)\ ,\ \ y(t)=Y(j\omega)$$
$$x(t)=X(j\omega)$$

$$(j\omega)^2Y(j\omega)+5j\omega Y(j\omega)+6Y(j\omega)=j\omega X(j\omega)+4X(j\omega)\rightarrow\left[(j\omega)^2+5j\omega+6\right]Y(j\omega)=\left[j\omega+4\right]X(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{j\omega+4}{(j\omega)^2+5j\omega+6}$$

$$\frac{j\omega+4}{(j\omega)^2+5j\omega+6}=\frac{j\omega+4}{(j\omega+3)(j\omega+2)}=\frac{A}{j\omega+3}+\frac{B}{j\omega+2}=\frac{j\omega A+2A+j\omega B+3B}{(j\omega+3)(j\omega+2)}=\frac{j\omega(A+B)+2A+3B}{(j\omega+3)(j\omega+2)}$$
$$\frac{j\omega+4}{(j\omega)^2+5j\omega+6}=\frac{j\omega(A+B)+2A+3B}{(j\omega+3)(j\omega+2)}$$

$$\begin{aligned}A+B&=1\\2A+3B&=4\end{aligned} \quad\rightarrow\quad A=-1\ ,\ \ B=2$$

$$H(j\omega)=\frac{-1}{j\omega+3}+\frac{2}{j\omega+2}$$

$$h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}=F^{-1}\left\{\frac{-1}{j\omega+3}+\frac{2}{j\omega+2}\right\}=-F^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+3}\right\}+2F^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+2}\right\}=-e^{-3t}u(t)+e^{-2t}u(t)$$

Kural : $e^{-a\,t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{j\omega+a}$

$$h(t)=\left[-e^{-3t}+e^{-2t}u(t)\right]u(t)$$

NOT : LTI sistemin $h(t)=\left[-e^{-3t}+e^{-2t}u(t)\right]u(t)$ impuls cevabından, sistem fonksiyonu öz değerlerinin $\lambda_1=-3$ ve $\lambda_2=-2$ olarak negatif veya sol yarı düzlemde olması, sistemin de asimtotik kararlı olduğu anlamına gelir. Sistem kararlı olduğu için, $H(j\omega)$ transfer fonksiyonunun ters Fourier transformasyonu alınabilmiştir.

b) $x(t)=e^{-3t}u(t)$ Sistem girişi için sistem cevabını elde edin.

Konvülüsyon kuralı : Zaman domeninde konvülüsyon, frekans domeninde fonksiyonların Fourier transformasyonlarının çarpımına eşittir.

$$y(t)=x(t)*h(t)=X(j\omega)H(j\omega)=Y(j\omega)\quad;\quad F\{x(t)*h(t)\}=X(j\omega)H(j\omega)=Y(j\omega)$$

$$x(t)=e^{-3t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega+3}=X(j\omega)\quad\text{ve}\quad H(j\omega)=\frac{-1}{j\omega+3}+\frac{2}{j\omega+2}$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+3}\left[\frac{-1}{j\omega+3}+\frac{2}{j\omega+2}\right]=\frac{1}{j\omega+3}\left[\frac{j\omega+4}{(j\omega+2)(j\omega+3)}\right]=\frac{j\omega+4}{(j\omega+2)(j\omega+3)^2}$$

$$\frac{j\omega+4}{(j\omega+2)(j\omega+3)^2}=\frac{A}{j\omega+2}+\frac{B}{(j\omega+3)^2}+\frac{C}{j\omega+3}=\frac{A(j\omega+3)^2+B(j\omega+2)+C(j\omega+3)(j\omega+2)}{(j\omega+2)(j\omega+3)^2}$$

$$=\frac{A(j\omega)^2+6j\omega A+9A+j\omega B+2B+(j\omega)^2C+5j\omega C+6C}{(j\omega+2)(j\omega+3)^2}$$

$$=\frac{(j\omega)^2(A+C)+j\omega(6A+B+5C)+9A+2B+6C}{(j\omega+2)(j\omega+3)^2}$$

$$\frac{j\omega+4}{(j\omega+2)(j\omega+3)^2}=\frac{(j\omega)^2(A+C)+j\omega(6A+B+5C)+9A+2B+6C}{(j\omega+2)(j\omega+3)^2}$$

$$\begin{aligned}&A+C=0\\&6A+B+5C=1\qquad\rightarrow\quad A=2\,,\,B=-1\,,\,C=-2\\&9A+2B+6C=4\end{aligned}$$

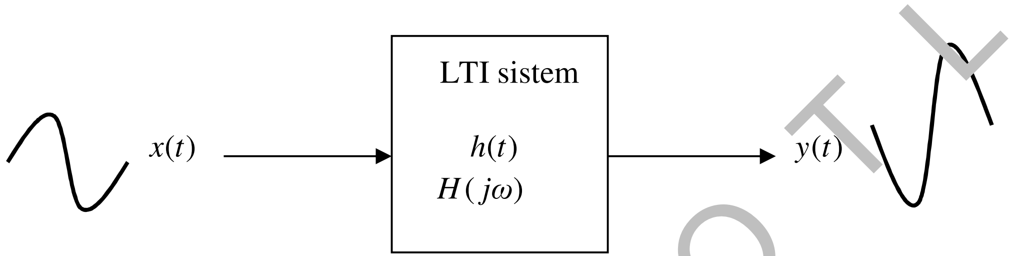
$$Y(j\omega) = \frac{2}{j\omega+2} - \frac{1}{(j\omega+3)^2} - \frac{2}{j\omega+3}$$

$$y(t) = F^{-1}\{Y(j\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega+2} - \frac{1}{(j\omega+3)^2} - \frac{2}{j\omega+3}\right\} = 2F^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+2}\right\} - F^{-1}\left\{\frac{1}{(j\omega+3)^2}\right\} - 2F^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+3}\right\}$$

$$= 2e^{-2t}u(t) - te^{-3t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

$$y(t) = \left[2e^{-2t} - te^{-3t} - e^{-3t}\right]u(t)$$

FREKANS CEVABI



Şekil 3. LTI Sistemin $x(t) = e^{st}$ sinusoid işarete sinusoid cevabı

Diğer bir deyişle **girişindeki sinusoid sinyalin frekansını sabit tutarak sinyalin genlik ve fazında değişim sağlayan sistem cevabına frekans cevabı denilmektedir**. Eğer sistem impuls cevabı $h(t)$ ve girişi $x(t) = e^{St}$ veya $x(t) = A\,e^{j(\omega t+\phi)} = A\,e^{j\phi}e^{j\omega t}$ $(s = j\omega\,, \sigma = 0)$ gibi bir sinusoid ise, sistem toplam çıkışı $y(t)$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) A\, e^{j\,(\omega\,(t-\tau)+\varphi)} d\tau = A\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\,\omega\,\tau} e^{j\,\varphi} e^{j\,\omega\,t} d\tau$$
$$= H(j\omega)\, A\, e^{j\,\varphi} e^{j\,\omega\,t}$$

$H(j\omega)$ sistem transfer fonksiyonunu

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\angle H(j\omega)}$$ **Sistem frekans cevabı**

Sistem cevabı/çıkışı $x(t) = A\,e^{j(\omega t+\phi)} = A\,e^{j\phi}e^{j\omega t}$ girişiyle aynı ω frekansta ama sistem fonksiyonunun $H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\angle H(\omega)}$ formundan dolayı girişten farklı genlik ve faz da elde edilmiştir. Çıkışı belli bir ω_0 frekansı için $x(t) = A\,e^{j\,(\omega_0\,t+\varphi)} = A\,e^{j\,\varphi}e^{j\,\omega_0\,t}$ olarak düzenlersek ifade aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y(t) = H(j\omega)\, A\, e^{j\,\varphi} e^{j\,\omega\,t} = H(\omega_0) A\, e^{j\,\varphi} e^{j\,\omega_0\,t}$$
$$= H(\omega_0)x(t)$$

Örnek

LTI Sistem girişi $x(t)=20e^{j4\pi t}$ ve sistem frekans cevabı $H(j4\pi)=1-j\sqrt{3}$ ise, $y(t)$ sistem çıkışını hesaplayın.

Çözüm

$y(t)=H(j\omega)x(t)$ denklemini göz önüne aldığımızda, $x(t)=20e^{j4\pi t}$ girişi için çıkış,

$$y(t)=H(j4\pi)20e^{j4\pi t}$$

yazılabilir. Görüldüğü gibi çıkış, girişle aynı frekansta ($\omega=4\pi$) ama farklı genlik ve fazdadır. Buna göre frekans cevabını düzenlersek,

$$|H(j4\pi)|=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

$$\angle H(j4\pi)=tg^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{1})=\frac{5\pi}{3} \text{ veya } -\frac{\pi}{3}$$

$$H(j4\pi)=|H(j4\pi)|e^{j\angle H(j4\pi}=2e^{-j\pi/3}$$

$$\begin{aligned} y(t)&=H(j4\pi)20e^{j4\pi t}=(2e^{-j\pi/3})20e^{j4\pi t} \\ &=40e^{j(4\pi t-\pi/3)} \end{aligned}$$

Buradan başlangıçta genliği 20 olan işaret şimdi iki katına çıkarak 40, ve başlangıca göre $\pi/3$ kadarda faz farkı oluşmuştur.