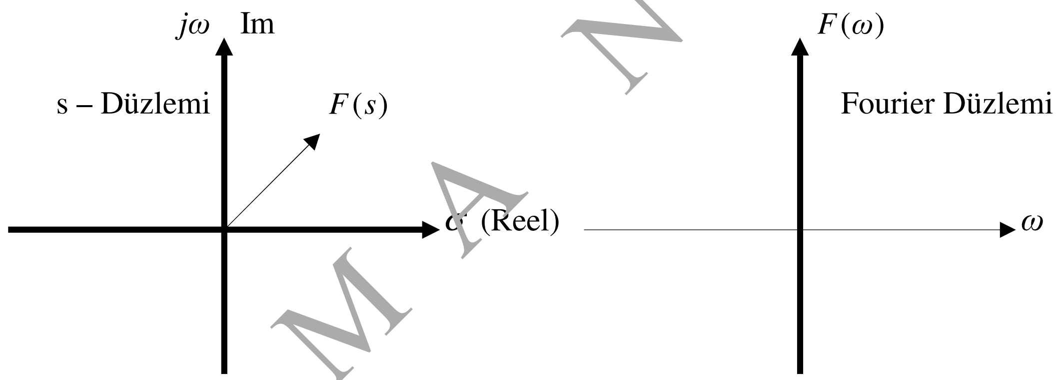
LAPLACE TRANSFORMASYONU

Fourier transformasyonu, daha ziyade işaret analiz tekniği olmasına karşın, Laplace transformasyonu daha ziyade sistem analiz tekniği olarak bilinmektedir. Bununla beraber Laplace ile kısmi işaret analizde yapılabilmektedir. Özellikle Fourier transaformasyonunun yetersiz kaldığı işaretlerin yakınsama bölgelerinin tayininde Laplace etkli bir yöntemdir.

Fourier transformasyonu bir çok önemli katkısının yanısıra, frekans uzayının yalnızca imajiner bölümüyle ilgili olmasının getirdiği sınırlama veya e^{at} tipli ($a > 0$) reel değerlikli exponensiyellerin sürekli artan formu için bir karşılığının olmaması ve nihayet, stabil olmayan sistemler içinde kullanılamayacak durumda olması, Fourier transformasyonunun önemli eksiklikleri olarak görünmektedir. Laaplace Transformasyonu bunları gözeten bir yaklaşım olarak ortaya çıkmıştır.

Bilindiği gibi sürekli-zaman ve lineer zamandan bağımsız sürekli (LTIC) sistemleri başta olmak üzere Laplace transformasyonlarının **integro-diferansiyel denklem sistemlerinin** cebirsel denklemlere dönüştürülmesi üzerine önemli uygulama alanı olmasına karşın, bu bölümde daha ziyade Laplace transformasyonunun işaret analiz açısından özellikleri ele alınacaktır. Aşağıda e^{at}, $a > 0$ tipli sinyallerin çözümünü sağlayan s Düzlemi ve bundan yoksun olan Fourier düzlemi verilmiştir.



(a) : $s = \sigma + j\omega$ Kompleks frekans düzlemi (b) : $s = j\omega$ Özel kompleks frekans düzlemi

Şekil 1. (a) : Laplace transformasyonu : $s = \sigma + j\omega$, (b) : Fourier transformasyonu ($\sigma = 0$)

Laplace Denklemleri

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-St} dt$$ **Laplace Transformasyonu (Bilateral, çift yönlü)**

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-St} dt$$ **Laplace Transformasyonu (Unilateral, tek yönlü)**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{St} ds$$ **Ters Laplace Tranformasyonu**

Yakınsama Bölgesi

Daha önce "*The Region of Convergence* (ROC)" adıyla anılan yakınsama bölgesi, Laplace transformasyonunun varlığını ($\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\ e^{-\sigma t}\right| dt<\infty$) gösteren bölgedir. Bu bölgenin varlığı halinde hangi transformasyon olursa olsun onun mevcut olabileceğini ve yakınsamanın mümkün olacağını düşünebiliriz. ROC aynı zamanda sistemin kararlılığınında göstergesi olduğundan önemlidir. Bu nedenle $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\ e^{-\sigma t}\right| dt<\infty$ denkleminin sonlu bir değer üretmesini sağlayan ve yakınsama bölgesini (ROC) tanımlayan σ değerinin tek (unique) değil, çok hatta teorik anlamda sonsuz olabileceği daha önceki kısımlarda izah edilmişti. Bu özellik Laplace transformasyonunu, Fourier transformasyonuna göre avantajlı ve daha genel kılmaktadır.

Örnek

$f(t)=e^{3t}u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu bulun

Çözüm

Şimdi ele alınan $f(t)=e^{3t}u(t)$ sinyalinin Laplace yaklaşımıyla tam çözümünü elde etmeye çalışalım.

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-s\ t}\ dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{3t}u(t)\ e^{-(\sigma+j\ \omega)\ t}\ dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma-3+j\ \omega)\ t}\ dt=-\frac{1}{\sigma-3+j\ \omega}\left[e^{-(\sigma-3+j\ \omega)\ t}\right]_{0}^{\infty}$$

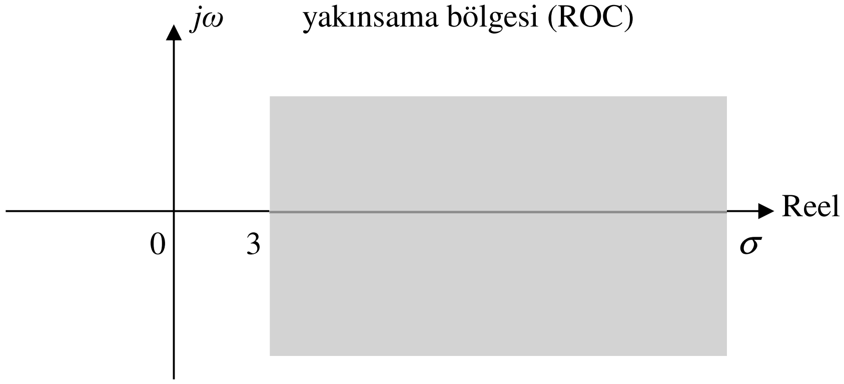
$$=-\frac{1}{\sigma-3+j\ \omega}\left[e^{-(\sigma-3+j\ \omega)\ \infty}-e^{-(\sigma-3+j\ \omega)\ 0}\right]=-\frac{1}{\sigma-3+j\ \omega}\left[\frac{1}{e^{(\sigma-3+j\ \omega)\ \infty}}-1\right]=-\frac{1}{\sigma-3+j\ \omega}\left[\frac{1}{\infty}-1\right]$$

$$=-\frac{1}{\sigma-3+j\ \omega}[0-1]=\frac{1}{\sigma-3+j\ \omega}$$

$$=\frac{1}{s-3}$$

Buna göre $f(t)=e^{3t}u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonu

$$e^{3t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-3}\qquad \sigma>3$$



Şekil 2. $s=\sigma+j\omega$ Düzlemi

Örnek

$f(t) = e^{-3t}u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu bulun

Çözüm

Bu örnek, Fourier yaklaşımı açısından mümkün görünmesine rağmen, burada alternatif olarak yukarıdakine benzer biçimde ele alınacaktır. Çözümün aşamalarıda aşağıda verilmiştir.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}u(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-3t}\, e^{-s\,t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-3t}\, e^{-(\sigma+j\,\omega)\,t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(3+\sigma+j\,\omega)\,t}\, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\; e^{-(3+\sigma+j\,\omega)\,t}\right]_0^{\infty} = \left[\left(-\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\; e^{-(3+\sigma+j\,\omega)\,\infty}\right) - \left(-\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\; e^{-(3+\sigma+j\,\omega)\,0}\right)\right]$$

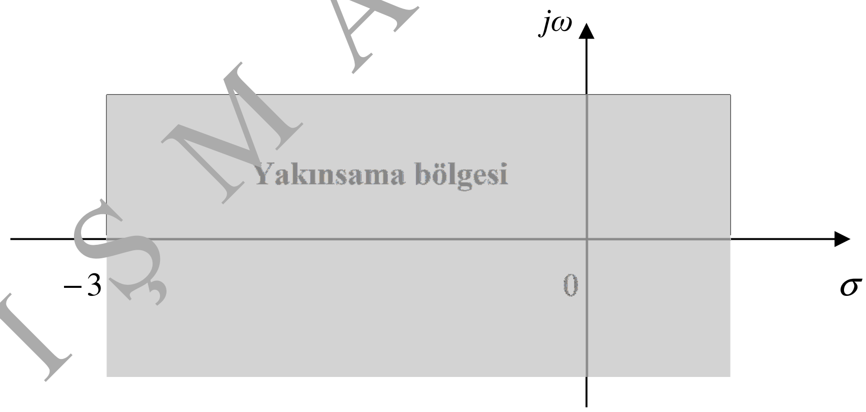
Bu denklemde görülen

$$\left(-\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\; e^{-(3+\sigma+j\,\omega)\,\infty}\right)$$

ifadesinin $t \to \infty$ için sonlu bir değer üretebilmesi için $e^{-(3+\sigma+j\,\omega)\,\infty}$ teriminin sıfır olması gerekir ($e^{-(3+\sigma+j\,\omega)\,\infty} \to 0$). Bunun için yakınsama bölgesinin

$(3+\sigma) > 0$ veya $\sigma > -3$

olması gerekir. Buna uygun yakınsama bölgesi (ROC) aşağıdaki görünümde olacaktır.



Şekil 3. $f(t) = e^{-3t}u(t)$ İşaretinin $\sigma > -3$ için yakınsama bölgesi

Not : Tek yönlü Nedensel Laplace Transformasyonlarında (single side, unileteral Laplace Transform), kutuplar yakınsama bölgesinin solunda yer alır.

Buradan, Laplace transformasyonunun bulunuması aşamasına geçilebilir.

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \left[\left(-\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\; e^{-(3+\sigma+j\omega)\,\infty}\right)+\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\right]=\left[-\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\;\frac{1}{e^{(3+\sigma+j\omega)\,\infty}}+\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\right]\\
&=\left[-\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\times\frac{1}{\infty}+\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\right]=\left[-\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\times 0+\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\right]\\
&=\left[0+\frac{1}{3+\sigma+j\omega}\right]\\
&=\frac{1}{3+\sigma+j\omega} \quad , \qquad \sigma>-3\\
&=\frac{1}{s+3}
\end{aligned}
$$

Laplace Transformasyonunun Var Olması

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\; e^{-\sigma t}\right| dt<\infty$$

Bu denklemin sağlanması $F(s)$ üzerinden Ters Laplace Transformasyonu vasıtasıyla $f(t)$ sinyalinin tekrar elde edilebileceğine dair kanıttır ($f(t)\leftrightarrow F(s)$).

Standart Fonksiyonların Laplace Transformasyonları

Örnek

$f(t)=\delta(t)u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\; dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\, e^{-s\,t}\; dt=\delta(0)\, e^{-s\,0}\\
&=1
\end{aligned}
$$

Bunun anlamı $F(\omega)=1$ Fourier transformasyonundaki gibi düşünülebilir.

Örnek

$F(s)=\delta(s)$ işaretinin invers Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

Dualiti prensibinden

$$
\begin{aligned}
L^{-1}[\delta(s)] &= \frac{1}{2\pi\, j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\delta(s)\, e^{s\,t}\, ds\\
&=\frac{1}{2\pi\, j}
\end{aligned}
$$

Örnek

$f(t)=1$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$f(t) \Leftrightarrow F(s)$

$$L^{-1}[\delta(s)]=\frac{1}{2\pi\ j} \quad , \quad \begin{array}{c} \delta(s) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi\ j} \\ 1 \Leftrightarrow 2\pi\ j\delta(s) \end{array}$$

Örnek

$f(t)=u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\ dt=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-s\,t}\ dt=\int_{0}^{\infty} (1)\, e^{-s\,t}\ dt=\int_{0}^{\infty} e^{-s\,t}\ dt=-\frac{1}{s}\ e^{-s\,t}\,|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{s} \quad , \quad \operatorname{Re} s>0$$

Örnek

$f(t)=tu(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\ dt=\int_{-\infty}^{\infty} tu(t)\, e^{-s\,t}\ dt=\int_{0}^{\infty} t\,(1)\, e^{-s\,t}\ dt=\int_{0}^{\infty}\ t\, e^{-s\,t}\ dt=\frac{e^{-s\,t}}{s^2}(-st-1)\,|_{0}^{\infty}=\frac{1}{s^2}$$

Örnek

$f(t)=t^2u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\ dt=\int_{-\infty}^{\infty} t^2u(t)\, e^{-s\,t}\ dt=\int_{0}^{\infty} t^2\ (1)\, e^{-s\,t}\ dt=\int_{0}^{\infty}\ t^2\ e^{-s\,t}\ dt$$

$$=\frac{e^{-s\,t}}{(-s)^3}(s^2t^2+2s\,t+2)\,|_{0}^{\infty}=\frac{2}{s^3}$$

Kural : $t^n u(t)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

Örnek

$f(t) = \cos \omega_0 t \, u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad , \ \mathrm{Re}\, s > 0$$

Kural : $\cos bt \, u(t) = \dfrac{s}{s^2 + b^2}$

Örnek

$f(t) = \sin \omega_0 t \, u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad , \ \mathrm{Re}\, s > 0$$

Kural : $\sin bt \, u(t) = \dfrac{b}{s^2 + b^2}$

Örnek

$f(t) = e^{-at} \cos \omega_0 t \, u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \frac{s + a}{s^2 + \omega_0^2}$$

Örnek

$f(t) = e^{-at} \sin \omega_0 t \, u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$$

Örnek

$x(t) = 2e^{-4t}\cos(6t + \theta)u(t)$ Sinyalinin yakınsama bölgesini (ROC) tayin edin.

Çözüm

Verilen ifadenin yakınsama bölgesi için Laplace transformasyonuna bakmamız gerekiyor.

Kural : $e^{-a\,t}\cos(bt + \theta)u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{(s \mp a)}$

$$x(t) = e^{-4t}\cos(6t + \theta)u(t) \leftrightarrow \frac{2(s+4)\cos(\theta) - 12\sin(\theta)}{s^2 + 8s + 52} = X(s)$$

Örnek

$H(s)=\dfrac{s+3}{s+4}$ Sisteminin ters Laplace transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

$$H(s)=\frac{s+6}{s+4}=1+\frac{A}{s+4}\rightarrow\frac{s+4+A}{s+4}=\frac{s+A+4}{s+4}$$

$$A+4=6\rightarrow A=2$$

$$H(s)=1+\frac{2}{s+4}\rightarrow L^{-1}\left\{1+2\frac{1}{s+4}\right\}=\delta(t)+2e^{-4t}u(t)=h(t)$$

$$h(t)=\delta(t)+2e^{-4t}u(t)$$

Örnek

$F(s)=\dfrac{3s+6}{s(s^2+5s+6)}$ işaretinin invers Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s)=\frac{3s+6}{s(s^2+5s+6)}=\frac{3(s+2)}{s(s+2)(s+3)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+2}+\frac{c_3}{s+3}=\frac{c_1(s^2+5s+6)+c_2(s^2+3s)+c_3(s^2+2s)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{s^2(c_1+c_2+c_3)+s(5c_1+3c_2+2c_3)+6c_1}{s(s+2)(s+3)}$$

$$3s+6=s^2(c_1+c_2+c_3)+s(5c_1+3c_2+2c_3)+6c_1$$

$$c_1+c_2+c_3=0$$

$$5c_1+3c_2+2c_3=3$$

$$6c_1=6\rightarrow c_1=1\ ,\ c_2=0\ ,\ c_3=-1$$

Bulunan fonksiyonun invers Laplace transformasyonu alınırsa

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right\}=u(t)-e^{-3t}u(t)=f(t)$$

$$f(t)=\left[1-e^{-3t}\right]u(t)$$

Laplace Transformasyonunun Özellikleri

Lineerlik

Fourier gibi Laplace Transformasyonu da lineerdir.

$f_1(t)\Leftrightarrow F_1(s)$ ve $f_2(t)\Leftrightarrow F_2(s)$

$$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\Leftrightarrow a_1F_1(s)+a_2\ F_2(s)$$

Zaman öteleme : $f(t-t_0)$

$$f(t-t_0) \Leftrightarrow F(s)\, e^{-s\,t_0}$$

Frekans öteleme : $F(s-s_0)$

$$f(t)\, e^{-s_0\,t} \Leftrightarrow F(s-s_0)$$

Ağırlıklandırma (scaling) : $f(at)$

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\frac{s}{|a|})$$

Konvülüsyon (convolution)

1) $\mathbf{x(t) * h(t) \leftrightarrow X(}s\mathbf{)H(}s\mathbf{)}$: **Zaman Domeninde Konvülüsyon**

2) $\mathbf{x(t)h(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(s) * H(s)}$: **Zaman Domeninde Çarpma : s Düzleminde Modülasyon**

Türev

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$\frac{d^n f}{dt^n} \Leftrightarrow s^n\, F(s) - s^{n-1}\, f(0^-) - s^{n-2}\, \dot{f}(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

Nedensellik ve Tek – Çift Yönlü Laplace Transformasyonu

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt$ Tek yönlü (unilateral) Laplace Transformasyonu

$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt$ Çift yönlü (bilateral) Laplace Transformasyonu

Örnek

$f(t) = e^{-2t} u(t) + e^{2t} u(-t)$ İşaretinin yakınsama bölgesini ve Laplace transformasyonunu bulun.

Çözüm

$u(t) \to t > 0$ den dolayı nedensel, $u(-t) \to t < 0$ den dolayı da nedensel olmayan bir sinyalin söz konusu olduğunu görmekteyiz.

$$f(t) = e^{-2\,t} u(t) + e^{2\,t} u(-t) = e^{-2\,|t|} = f_1(t) + f_2(t)$$

$f(t)$ sinyalinin yazımına bakıldığında $f_1(t) = e^{-2\,t}u(t)$ gibi nedensel ve $f_2(t) = e^{2\,t}u(-t)$ gibi nedensel olmayan bölümleri içermektedir. Diğer bir deyişle hem nedensel hemde nedensel olmayan özellikleri içeren bir sinyal söz konusudur. Bu nedenle yakınsama bölgesi arada bir bölge olarak beklenmektedir.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5\,|t|}u(t)\, e^{-(\sigma+j\,\omega)\,t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-2\,t}u(t) + e^{2\,t}u(-t) \right] e^{-(\sigma+j\,\omega)\,t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\,t}u(-t)\, e^{-(\sigma+j\,\omega)\,t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,t}u(t)\, e^{-(\sigma+j\,\omega)\,t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(\sigma-2+j\,\omega)\,t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+2+j\,\omega)\,t}\, dt$$

$$= \frac{1}{-(\sigma-2+j\omega)}\left[e^{-(\sigma-2+j\,\omega)\,t} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(\sigma+2+j\omega)}\left[e^{-(\sigma+2+j\,\omega)\,t} \right]_{0}^{\infty} \quad ; \; \sigma-2<0+\sigma+2>0 = \sigma<2+\sigma>-2$$

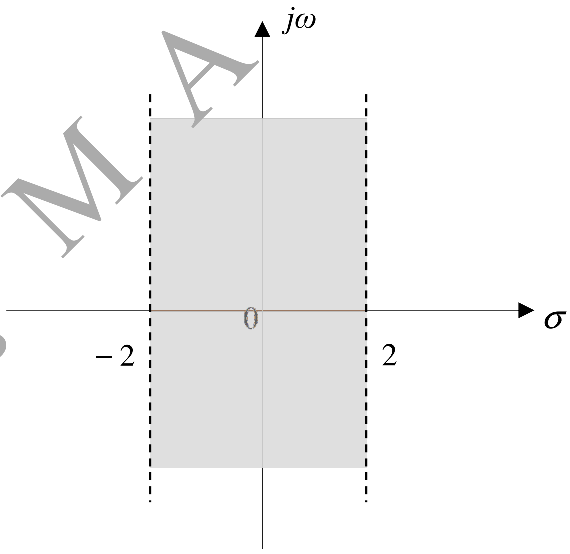
$$e^{-2\,t}u(t) + e^{2\,t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} \quad , \quad -2 < \sigma < 2$$

Not : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\,t}u(-t)\, e^{-(\sigma+j\,\omega)\,t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(\sigma-2+j\,\omega)\,t}\, dt$

Kural : $\lim_{t\to-\infty} e^{-(\sigma+a+j\omega)\,t} = 0$, $\sigma + a < 0 \rightarrow \sigma < -a$

Kural : $-e^{-a\,t}u(-t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s+a}$, $\sigma < -a$

Bunlara uygun yakınsama bölgesi aşağıdaki görünümde olacaktır.



Şekil 4. $-2 < s < 2$ Yakınsama bölgesi

$$e^{-2\,t}u(t) + e^{2\,t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} = -\frac{4}{s^2-4}$$

LİNEER ZAMANDAN BAĞIMSIZ SÜREKLİ (LTIC) SİSTEM CEVAPLARININ İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE ÇÖZÜMÜ

İntegral ve diferansiyel denklemlerdern oluşan integro diferansiyel denklemlerin Laplace yaklaşımlarıyla çözümü, Laplace alanındaki en bilinen yöntemlerdendir. Bu şekliyle daha yaygın olsada, şu ana kadar biz daha çok Laplace transformasyonunun sistem ve işaret analiz açısından özelliklerini analiz etmeye çalıştık. Şimdi Laplace transformasyonunun bu klasik özelliğini basit örneklerle ele almaya çalışacağız. Bunu yaparken yine çok klasik diferansiyel denklemlerle olan yaklaşımı değil de, aynı zamanda sistem özelliğini de içerecek şekilde almaya gayret edeceğiz. Bu açıdan sürekli-zaman zamandan bağımsız (LTIC) sistem örneklerini ele alarak, bu tür sistemlerin cevaplarını Laplace yaklaşımıyla analiz etmeye çalışacağız. Bu anlamda bir LTIC sistemin parametrelerini (giriş, çıkış, impuls cevap) $\dfrac{d^k y(t)}{dt^k}$ gibi difarensiyel dernklemlerle yazmak ve göstermek mümkündür.

Örnek

Girişi $f(t) = 2\,e^{-4t}u(t)$ olan ve $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 15\,y(t) = \dfrac{df}{dt} + 2\,f(t)$ denklemiyle verilen LTIC sistemin $y(t)$ cevabını hesaplayalım.

Çözüm

Çözüm transfer fonksiyonu yaklaşımından yapılacaktır. Sistem denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = s^2\ \mathrm{Y}(s)\,,\quad \frac{dy(t)}{dt} = s\ \mathrm{Y}(s)\ ,\quad y(t) = Y(s)\ \text{ ve }\ \frac{dx(t)}{dt} = s\ X(s)\ ,\ x(t) = X(s)$$

$$s^2 Y(s) + 8sY(s) + 15Y(s) = sX(s) + 2X(s)$$

$$[s^2 + 8s + 15]Y(s) = [s + 2]X(s)$$

buradan transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2 + 8s + 15}$$

giriş fonksiyonunun Laplace dönüşümü ise,

$$F(s) = L[2\,e^{-4t}u(t)] = \frac{2}{s+4}$$

$$Y(s) = H(s)F(s) = \frac{2(s+2)}{(s+4)(s^2+8s+15)} = \frac{2(s+2)}{(s+4)(s+5)(s+3)} = \frac{c_1}{s+4} + \frac{c_2}{s+5} + \frac{c_3}{s+3}$$

$$= \frac{(c_1+c_2+c_3)s^2 + (8c_1+7c_2+9c_3)s + 15c_1 + 12c_2 + 20c_3}{(s+4)(s-6)(s+2)}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$
$$8c_1 + 7c_2 + 9c_3 = 2$$
$$15c_1 + 12c_2 + 20c_3 = 4$$

$c_1 = 4$, $c_2 = -3$, $c_3 = -1$

buradan $Y(s)$ sistem cevabı

$$Y(s) = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s+5} - \frac{1}{s+3}$$

bulunan $Y(s)$ fonksiyonun invers Laplace transformasyonu alınırsa

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left(\frac{4}{s+4} - \frac{3}{s+5} - \frac{1}{s+3}\right) = (4\,e^{-4t} - 3\,e^{-5t} - e^{-3t})u(t)$$

$$y(t) = (4\,e^{-4t} - 3\,e^{-5t} - e^{-3t})u(t)$$

olarak bulunur.

Örnek

Bir sistemin ikinci dereceden diferansiyel denklemle gösterimi

$$(D^2 + 4D + 3)\,y(t) = (D+4)\,f(t)$$

şeklindedir. $f(t)$ sistem girişini ve $y(t)$ sistem çıkışını göstermektedir. Sistem girişi $f(t) = e^{-2t}u(t)$ ve başlangıç koşulları $y(0^-) = -2$ ve $\dot{y}(0^-) = 3$ ise sistem çıkışı $y(t)$ yi hesaplayalım.

Çözüm

Verilen sistemin diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = \frac{df}{dt} + 4f(t)$$

$y(t) \Leftrightarrow Y(s)$
özelliğinden

$$\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - (-2) = sY(s) + 2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \Leftrightarrow s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) = s^2Y(s) - (-2)s - 3 = s^2Y(s) + 2s - 3$$

$$f(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{df}{dt} \Leftrightarrow sF(s) - f(0^-) = \frac{s}{s+2} - 0 = \frac{s}{s+2}$$

$$\frac{df}{dt} + 3f(t) = \Leftrightarrow sF(s) - f(0^-) + 4F(s) = s\frac{1}{s+2} + 4\frac{1}{s+2} = \frac{s+4}{s+2}$$

Buna gore sistem diferansiyel denklemi

$$[s^2Y(s) + 2s - 3] + 4[sY(s) + 2] + 3Y(s) = \frac{s}{s+2} + 4\frac{1}{s+2}$$

$$s^2Y(s) + 2s - 3 + 4sY(s) + 8 + 3Y(s) = \frac{s+4}{s+2}$$

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) + 2s + 5 = \frac{s+4}{s+2}$$

Dikkat edilirse çıkışın olduğu sol tarafta $Y(s)$ ortak parantezin dışında kalan $2s+5$ terimi, başlangıç koşullarından oluştuğu için, sistemin başlangıç koşullarına göre olan sistem cevabı, yani "sıfır giriş cevabı" olarak değerlendirilmektedir. Bununla beraber eşitliğin sağ tarafında yer alan terimler sistemin giriş yapıldığı an ile ilgili olduğundan, bu anlamda "sıfır durum cevabı" olarak kabul edilmektedir.

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = \underbrace{-2s-5}_{\text{baslangic kosullari}} + \frac{s+4}{\underbrace{s+2}_{\text{giris terimleri}}}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-2s-5}{s^2+4s+3}}_{\text{sifir giris cevabi}} + \underbrace{\frac{s+4}{(s+2)(s^2+4s+3)}}_{\text{sifir durum cevabi}}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-2s-5}{(s+1)(s+3)}}_{\text{sifir giris cevabi}} + \underbrace{\frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}}_{\text{sifir durum cevabi}}$$

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{-2s-5}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} = \frac{(A+B)s + 3A + B}{s+1}$$

$$A + B = -2$$
$$3A + B = -5$$

$$A = -\frac{3}{2} \quad , \qquad B = -\frac{1}{2}$$

$$Y_{zi}(s) = -\frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}$$

$$Y_{zs}(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s+3} = \frac{C(s^2+5s+6) + D(s^2+4s+3) + E(s^2+3s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{(C+D+E)s^2 + (5C+4D+3E)s + 6C+3D+2E}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$C + D + E = 0$$
$$5C + 4D + 3E = 1$$
$$6C + 3D + 2E = 4$$
$$C = \frac{3}{2} \quad , \qquad D = -2 \quad , \quad E = \frac{1}{2}$$

$$Y_{zs}(s) = \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}$$

buradan $Y(s)$ sistem cevabı

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

$$Y(s) = \left[-\frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}\right] + \left[\frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}\right]$$

Bunun invers Laplace transformasyonu alınırsa sistem toplam cevabı “ sıfır-giriş cevabı ve sıfır-durum cevabı” toplamlarından aşağıdaki gibi neticelenir.

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}\right] + L^{-1}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}\right]$$

$$y(t) = \underbrace{\left(-\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{sifir giris cevabi}} + \underbrace{\left(\frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{sifir durum cevabi}}$$

Laplace Transformasyonu ve Kararlılık

Bir sistemin girişi $f(t)$ ve çıkışı $y(t)$ olmak üzere LTI bir sistemin diferansiyel denklemlerle gösteriminin aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + b_{m-2}\frac{d^{m-2} f}{dt^{m-2}} + \cdots + b_1 \frac{d^m f}{dt^m} + b_0$$

Eğer bu sistemin giriş ve çıkış başlangıç koşullarını sıfır aldığımızı düşünürsek,

$y(t) \Leftrightarrow Y(s)$ ve $f(t) \Leftrightarrow F(s)$

$$\frac{d^r}{dt^r}\, y(t) \Leftrightarrow s^r Y(s)$$

$$\frac{d^k}{dt^k}\, f(t) \Leftrightarrow s^k F(s)$$

Bunlar göz önüne alınarak başlangıçtaki sistem denklemi

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)F(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} F(s)$$

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} F(s)$$

Sistem transfer fonksiyonu olarak $H(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$H(s) = b_{mn}\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

biçimlerinden biri olarak elde edilir. Son denklemden görmekteyiz ki, sistemin $p_1, p_2, \cdots, p_m$ kutupları sistemi sonsuza $z_1, z_2, \cdots, z_m$ sıfırları ise, sistemi sıfıra götürme özelliğindedir. Öncelikle $s = \sigma + j\omega$ ifadesinden görülebileceği gibi sistem kutup veya sıfırları kompleks yapıda olmakla beraber aynı zamanda yalnızca reel veya imajiner de olabileceklerini düşünerek buradan şimdilik kutupların başlıca özellikleri aşağıya çıkarılmıştır.

• Eğer kutupların <u>tümünün</u> reel kısmı negatif ise ($\sigma < 0$), sistem tam anlamıyla kararlıdır (sol yarı düzlem).

• Eğer kutuplardan <u>yalnızca birinin bile</u> reel kısmı pozitif ($\sigma > 0$) ise, sistem tam anlamıyla kararsızdır (sağ yarı düzlem).

• Eğer kutuplardan <u>yalnızca birinin bile</u> (daha fazlada olabilir) reel kısmı sıfır ($\sigma = 0$) ve kutuplar katlı değil ise, sistem marjinal olarak kararlıdır (Im($j\omega$), imajiner eksen).

Örnek

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 9s + 14}$$

Transfer fonksiyonuyla verilen LTIC sistemin kararlılığını araştırın.

Çözüm

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 9s + 14} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+7)}$$

Transfer fonksiyonunun kutupları,

$$(s+2) = 0 \Rightarrow s = -2 \quad \text{ve} \quad (s+7) = 0 \Rightarrow s = -7$$

Transfer fonksiyonunun sıfırları, $(s+1) = 0 \Rightarrow s = -1$ ve $(s+3) = 0 \Rightarrow s = -3$

Kutuplar (-2 ve -7) sol yarım düzlemde olduğu için sistem kararlıdır.

Örnek

$$H(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4}$$

Transfer fonksiyonuyla verilen LTIC sistemin kararlılığını araştırın.

Çözüm

$$H(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4} = \frac{(s+2)(s+4)}{s^2 + 4}$$

Transfer fonksiyonunun kutupları,

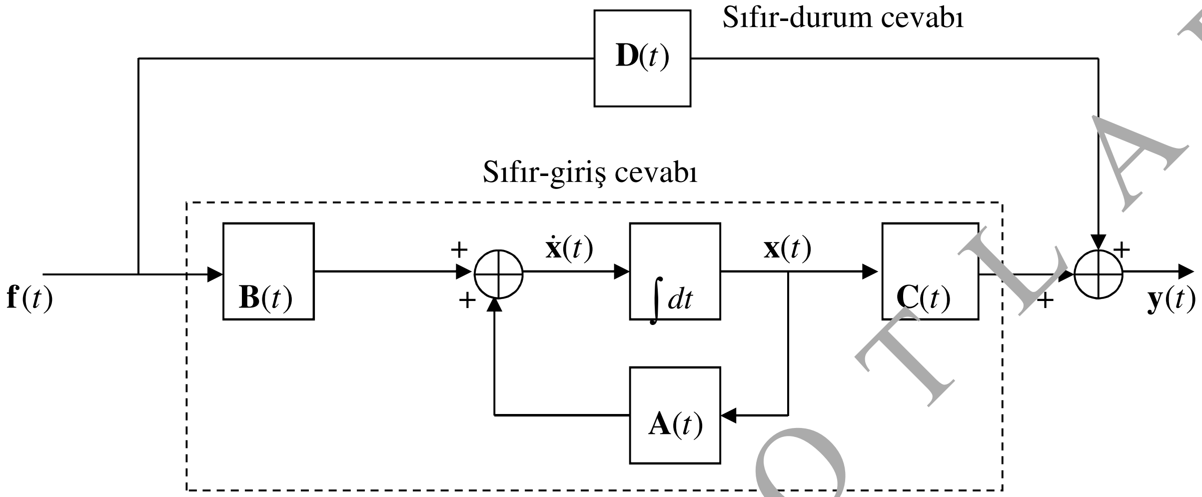
$$(s^2 + 4) = 0 \Rightarrow s = \pm 2j$$

Transfer fonksiyonunun sıfırları, $(s+2) = 0 \Rightarrow s = -2$ ve $(s+4) = 0 \Rightarrow s = -4$

Kutuplar ($\pm 2j$) imajiner eksen üzerinde ve katlı kök halinde olmadıklarından sistem stabil marjinal olarak kararlıdır.

DURUM-UZAY MODELLERİ
(state-space models)

Durum – Uzay Modeli, sürekli zaman uzayında *n*.dereceden tek ve kompleks bir diferansiyel denklemin, n tane birinci dereceden diferansiyel denklemle ifade edilmesini sağlayan ve durum değişkenlerini temel alana, frekans uzayındaki çözüme alternatif değil aynı zamanda güçlü bir çözüm tekniğidir.



Şekil 5. Lineer sürekli zaman sistemin durum-uzay gösterimi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{f}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{f}(t)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{kj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

Örnek

$\dddot{y} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 7y = 9f$ Sistemini durum-uzay tanımını gösterin

Çözüm

Sistem durum denkleminin durum değişkenlerine bağlı ifadesini bulmak için $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ çıkış başlangıç değerlerinin x_1, x_2, x_3, x_4 durum değişkenlerine bağlı gösterimlerini aşağıdaki gibi düşünürüz.

$x_1 = y$
$x_2 = \dot{y}$
$x_3 = \ddot{y}$
$x_4 = \dddot{y}$

ve aynı zamanda x_1, x_2, x_3, x_4 durum değişkenlerinin integratörlerin girişlerindeki $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ türevli durum değişkenlerine bağlı gösterimini

$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = x_3$
$\dot{x}_3 = x_4$

şeklinde düşünürsek verilen $\dddot{y} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 7y = 9f$ sistemini

$x_4 + 5x_3 + 8x_2 + 7x_1 = 9f$

durumuna gelir. Burada $\dot{x}_3 = x_4$ atamasından dolayı denklem

$$\dot{x}_3 + 5x_3 + 8x_2 + 7x_1 = 9f$$

veya

$$\dot{x}_3 = -5x_3 - 8x_2 - 7x_1 + 9f$$

nihai haline gelir. Sonuçta giriş ve çıkış durum değişkenlerini içeren ifadeler

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -5x_3 - 8x_2 - 7x_1 + 9u$$

$$y = x_1$$

denklemlerini matrisyel formda aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -8 & -7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} f$$

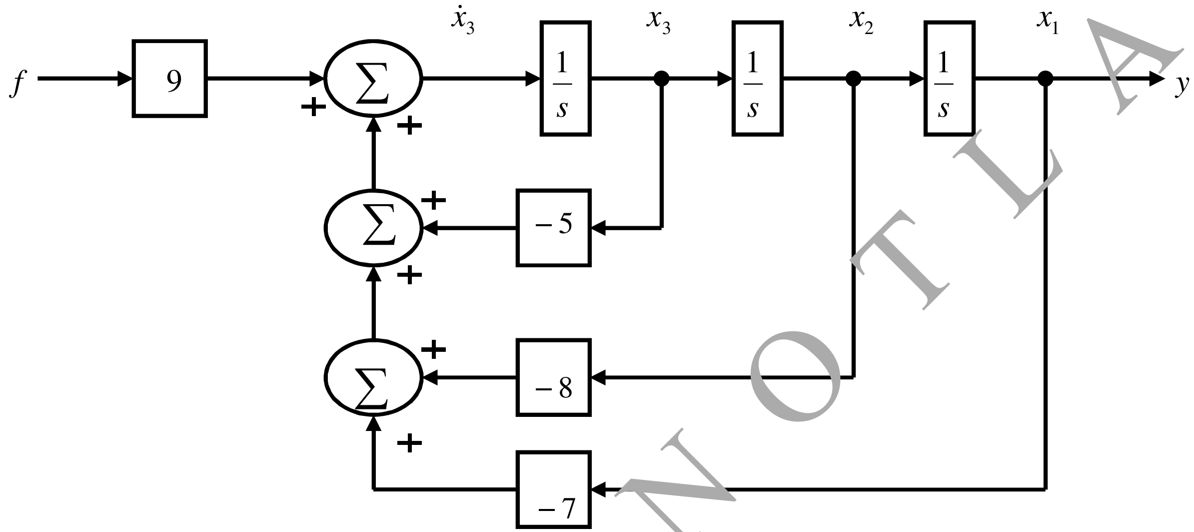
$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Genel gösterimde ise

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{f}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}$$

olarak ifade edilirler. Elde edilen durum-uzay denkleml çifti aşağıdaki şekildeki gibi görünürler.

$$\dot{x}_3 = -5x_3 - 8x_2 - 7x_1 + 9f$$
$$y = x$$



Şekil 12. Sistem : $\dddot{y} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 7y = 9u \rightarrow [\dot{x}_3 = -5x_3 - 8x_2 - 7x_1 + 9f]$ ve $[y = x]$

Durum Uzay Modelinde Bazı Kavramlar

Kontroledilebilirlik (controllability), sistemin sahip olduğu tüm dahili durumlar (states) sistem girişiyle değiştirilebiliyorsa, sistemin kontrol edilebilirliğinden söz edilir.
Eğer durum denklemi

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$\varsigma = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Eğer sistem kontrol edilebilir ise verilen matrisin rankı durum sayısına (n) eşit olmalıdır.

$$\mathrm{rank}(\varsigma) = n$$

Gözlemlenebilirlik

Gözlemlenebilirlik, sistem durum değişkenlerinin çıkışta gözlemlenebilmesidir. Durum uzay modeli göz önüne alındığında gözlemlenebilirliğin, durumlarıda içeren çıkış denklemiyle ilintili olduğunu fark etmekteyiz.

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{CA} & \mathbf{CA}^2 & \cdots & \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

Bir sistem gözlemlenebilir ise, Rank (O) = $n =$ durum sayısı

Örnek

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Sisteminin kontrol edilebilirliğini ve gözlemlenebilirliğini test edin.

Çözüm

Öncelikle durum uzay modelinin açık ifadesini yazalım.

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

a) Sistemin kontrol edilebilirliği,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.1+1.0 \\ 0.1+(-1).0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varsigma = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \rightarrow \varsigma = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varsigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\varsigma) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - (-2.0) = 0$$

$\det(\varsigma) = 0 \rightarrow \text{rank}(\varsigma) < 2$ yani durum değişken sayısından az olduğu için sistem (tam) kontrol edilebilir değildir. Sistem x_2 ikinci değişkeni kontrol edemiyor.

b) Sistemin gözlemlenebilirliği,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-2)+0.0 \\ 1.1+0.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-2)+0.0 & 1.1+0.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(O) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - (0.(-2)) = 1$$

$\det(O) \neq 0 \rightarrow \text{rank}(O) = 2 =$ yani durum değişken sayısına eşit olduğu için sistem gözlemlenebilirdir.

Örnek

$H(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s+3}{s^2+5s+6}$ Transfer fonksiyonunu durum uzay modeline dönüştürün.

Çözüm

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+b_{m-2}s^{m-2}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}b_0 & b_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$a_0=6\ ,\ a_1=5\quad ;\quad b_0=3\ ,\ b_1=1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Örnek

Durum denklemi aşağıda verilen sistemin kararlılığını inceleyin.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

Çözüm

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -3\\ -6 & -5\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$\lambda I-A=\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -3\\ -6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -3\\ -6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 3\\ 6 & \lambda+5\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)(\lambda+5)-3.6=\lambda^2+5\lambda-2\lambda-10-18=\lambda^2+3\lambda-28\rightarrow\lambda_1=-7\ ,\ \lambda_2=4$$

Buna göre öz değerlerden birinin pozitif çıkması halinde sistem kararsız olacağından, ikinci öz değerden dolayı ($\lambda_2=4$) sistem kararsızdır.

Örnek

Durum denklemi aşağıda verilen sistemin durum geçiş matrisini hesaplayın.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

Çözüm

$$\Phi(t)=e^{\mathbf{A}\,t}\leftrightarrow L^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]=\Phi(s)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -3\\ -6 & -5\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$sI-A=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -3\\ -6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -3\\ -6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-2 & 3\\ 6 & s+5\end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A)=(s-2)(s+5)-3.6=s^2+3s-10-18=s^2+3s-28$$

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\det(sI-A)}\begin{bmatrix}s-2 & 3\\ 6 & s+5\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2+3s-28}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ 3 & s-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+5}{s^2+3s-28} & \dfrac{6}{s^2+3s-28}\\ \dfrac{3}{s^2+3s-28} & \dfrac{s-2}{s^2+3s-28}\end{bmatrix}$$

$$\frac{s+5}{s^2+3s-28}=\frac{s+5}{(s+7)(s-4)}=\frac{A}{s+7}+\frac{B}{s-4}$$

$$s=-7 \quad \text{için} \quad A=\frac{-7+5}{(-7-4)}=\frac{-2}{-11}=\frac{2}{11}$$

$$s=4 \quad \text{için} \quad B=\frac{4+5}{(4+7)}=\frac{9}{11}\rightarrow \qquad \frac{s+5}{s^2+3s-28}=\frac{s+5}{(s+7)(s-4)}=\frac{2/11}{s+7}+\frac{9/11}{s-4}$$

$$\frac{6}{s^2+3s-28}=\frac{s+5}{(s+7)(s-4)}=\frac{A}{s+7}+\frac{B}{s-4}$$

$$s=-7 \quad \text{için} \quad A=\frac{6}{(-7-4)}=\frac{6}{-11}=-\frac{6}{11}$$

$$s=4 \quad \text{için} \quad B=\frac{6}{(4+7)}=\frac{6}{11}\rightarrow \qquad \frac{6}{s^2+3s-28}=\frac{6}{(s+7)(s-4)}=\frac{-6/11}{s+7}+\frac{6/11}{s-4}$$

$$\frac{3}{s^2+3s-28}=\frac{s+5}{(s+7)(s-4)}=\frac{A}{s+7}+\frac{B}{s-4}$$

$$s=-7 \quad \text{için} \quad A=\frac{3}{(-7-4)}=\frac{3}{-11}=-\frac{3}{11}$$

$$s=4 \quad \text{için} \quad B=\frac{3}{(4+7)\boxed{}}=\frac{3}{11}\rightarrow \qquad \frac{3}{s^2+3s-28}=\frac{3}{(s+7)(s-4)}=\frac{-3/11}{s+7}+\frac{3/11}{s-4}$$

$$\frac{s-2}{s^2+3s-28}=\frac{s-2}{(s+7)(s-4)}=\frac{A}{s+7}+\frac{B}{s-4}$$

$$s=-7 \quad \text{için} \quad A=\frac{-7-2}{\boxed{}(-7-4)}=\frac{-9}{-11}=\frac{9}{11}$$

$$s=4 \quad \text{için} \quad B=\frac{4-2}{(4+7)\boxed{}}=\frac{2}{11}\rightarrow \qquad \frac{s-2}{s^2+3s-28}=\frac{s-2}{(s+7)(s-4)}=\frac{9/11}{s+7}+\frac{2/11}{s-4}$$

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+5}{s^2+3s-28} & \dfrac{6}{s^2+3s-28}\\ \dfrac{3}{s^2+3s-28} & \dfrac{s-2}{s^2+3s-28}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2/11}{s+7}+\dfrac{9/11}{s-4} & \dfrac{-6/11}{s+7}+\dfrac{6/11}{s-4}\\ \dfrac{-3/11}{s+7}+\dfrac{3/11}{s-4} & \dfrac{9/11}{s+7}+\dfrac{2/11}{s-4}\end{bmatrix}$$

$$L^{-1}\{\Phi(s)\}=\Phi(t)=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{2/11}{s+7}+\dfrac{9/11}{s-4} & \dfrac{-6/11}{s+7}+\dfrac{6/11}{s-4}\\ \dfrac{-3/11}{s+7}+\dfrac{3/11}{s-4} & \dfrac{9/11}{s+7}+\dfrac{2/11}{s-4}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{11}e^{-7t}+\dfrac{9}{11}e^{4t} & -\dfrac{6}{11}e^{-7t}+\dfrac{6}{11}e^{4t}\\ -\dfrac{3}{11}e^{-7t}+\dfrac{3}{11}e^{4t} & \dfrac{9}{11}e^{-7t}+\dfrac{2}{11}e^{4t}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=e^{At}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}2e^{-7t}+9e^{4t} & -6e^{-7t}+6e^{4t}\\ -3e^{-7t}+3e^{4t} & 9e^{-7t}+2e^{4t}\end{bmatrix}$$

Sistemlerin Kanonik Formlarla Realizasyonu

Genel anlamda dört tip kanonik form mevcuttur. Bunlar

1. Direkt kanonik form (kontrol edilebilir form),
2.Seri (cascade) kanonik form,
3. Paralel kanonik form,
4. Gözlemlenebilir kanonik form.

Örnek

$H(s)=\dfrac{1}{s+a}$ Transfer fonksiyonunu durum uzay formunda elde edin.

Çözüm

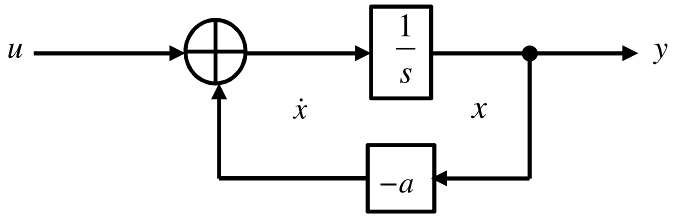
$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s+a}\rightarrow sY(s)+aY(s)=U(s)$$

$$Y(s)=X(s)\rightarrow sY(s)=sX(s)$$

$$U(s)=sX(s)+aX(s)\rightarrow sX(s)=-aX(s)+U(s)$$

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

Durum uzay modeli



Şekil 6. Transfer fonksiyonunu realizasyonu : $H(s) = \dfrac{1}{s+a}$

Örnek

$H(s) = \dfrac{s+6}{s^2+19s+84}$ ile verilen lineer zamandan bağımsız sistemin basit (direkt) kanonik formunu elde edin.

Çözüm

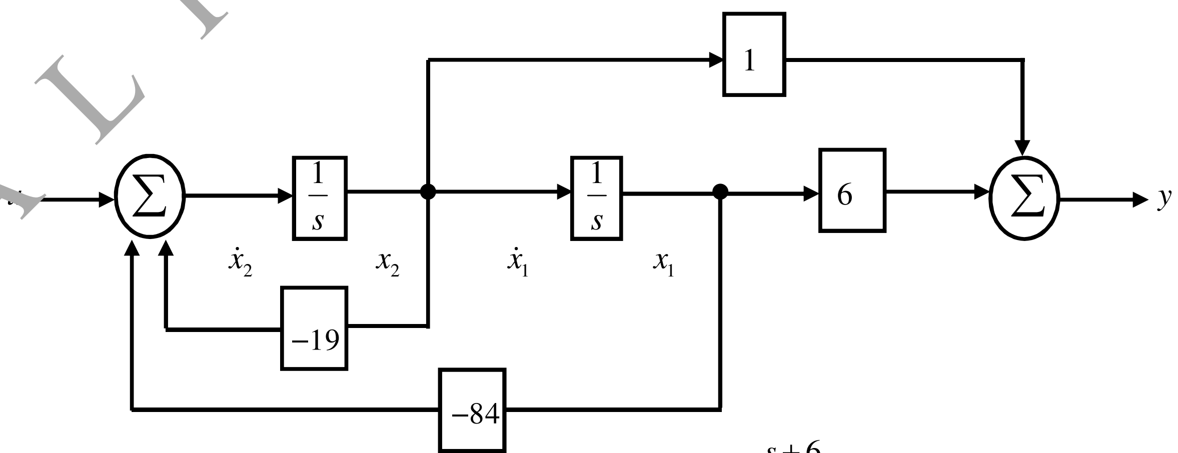
$$H(s) = \frac{s+6}{s^2+19s+84} = \frac{s+6}{(s+12)(s+7)} = \frac{X(s)}{U(s)}\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+19s+84}(s+6)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+19s+84} \rightarrow U(s) = s^2X(s) + 19sX(s) + 84X(s) \rightarrow s^2X(s) = -19sX(s) - 84X(s) + U(s)$$

$$x = x_1 = X(s)$$
$$x_2 = \dot{x}_1 = x' = sX(s)$$
$$\dot{x}_2 = x'' = s^2X(s)$$
$$\dot{x}_2 = -19x_2 - 84x_1 + u$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = s+6 \rightarrow Y(s) = sX(s) + 6X(s) \qquad \rightarrow$$
$$y(t) = x_2(t) + 6x_1(t)$$

$$x = x_1$$
$$x_2 = \dot{x}_1$$
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -84x_1 - 19x_2 + u$$
$$y = 6x_1 + x_2$$



Şekil 7. Sistem basit kanonik formu : $H(s) = \dfrac{s+6}{s^2+19s+84}$

LAPLACE DÖNÜŞÜM TABLOSU – I

	Zaman Domeni Fonksiyonu	Fourier Transformasyonu
1	$x(t)$	$X(s)$
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$A\,x(t)$	$A\,X(s)$
4	$\delta(t)$	1
5	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$
7	$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
8	$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
9	$r\ e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t+\theta)u(t)$	$\frac{r\cos(\theta)s+(\alpha r\cos\theta-\omega_0 r\sin\theta}{s^2+2\alpha s(\alpha^2+\omega_0^2)}$

$$r=\sqrt{\frac{A^2c+B^2-2AB\alpha}{c^2-\alpha^2}},\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{A\alpha-B}{A\sqrt{c-\alpha^2}}\right),\ \omega_0=\sqrt{c-\alpha^2}$$

LAPLACE DÖNÜŞÜM TABLOSU – II

	Zaman Domeni Fonksiyonu	Laplace Transformasyonu
10	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+\ a_2X_2(s)$
11	$x(t-t_0)u(t-t_0)$	$X(s)\ e^{-j\,t_0\,s}\quad,\quad t_0\geq 0$
12	$x(t)e^{s_0t}$	$X(s-s_0)$
13	$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)\quad,\quad a>0$
14	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)-x(0^-)$
15	$\frac{d^2}{dt^2}x(t)$	$s^2X(s)-sx(0^-)-\dot{x}(0^-)$
16	$\int_{0^-}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
17	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-}x(t)dt$