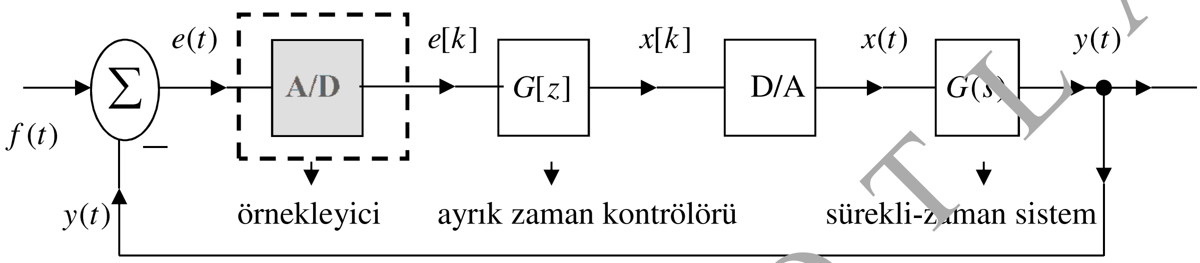
ÖRNEKLEME TEORİSİ

Örneklemeye Genel Bakış

Detay analizinden önce verilen ön bilgilerin ışığında örnekleyicinin genel bir sistem içerisindeki yeri ve davranışına bir göz atalım. Modern elektrik – elektronik mühendisliği ve sistemleri, sürekli ve ayrık zaman sistemlerinin kombinasyonundan oluşan hibrid görünümdedirler. Aşağıda böyle bir sistemi görmekteyiz.



Şekil 1. Hibrid sistem ve örnekleyici

Örnekleme

Bunun için öncelikle işaretin band-sınırlı (band-limited) olması gerekecektir. Böyle bir band sınırının örneğin B Hz olduğu kabul edelim. Bu durumdaki Nyquist miktarı (rate) olarak anılır ($f_{\text{S-min}} = F_N$). Örnekleme teorisinin uygulanabilmesi için iki temel kriter olan

1. Band-sınırlı işaret
2. Örnekleme frekansı ($f_S \geq 2B$)

Örnek

$x(t) = \cos 2\pi t$ Sinyali $f_s = 2$ Hz örnekleme frekansıyla örneklendiğinde oluşan ayrık sinyali bulun.

Çözüm

$x(t) = \cos 2\pi t = \cos 2\pi(1)t \rightarrow f_0 = 1$ Hz

Buradan örneklenmesi istenen analog sinyalin frekansının $f_0 = 1$ Hz olduğunu görmekteyiz. Böyle bir sinyali sağlıklı örnekleyebilmek için gereken örnekleme frekansı $f_S \geq 2f_0$ kuralı gereği eğer $f_0 = 1$ Hz ise, $f_S \geq 2$ olmalıdır. Verilen analog sinyal $t = kT_S$ olarak örneklendiğinde ayrık sinusoidal sinyal aşağıdaki formda oluşur.

$$x(kT_S) = \cos 2\pi t = \cos 2\pi(f_0)kT_S = \cos 2\pi f_0 \frac{1}{f_S}k = \cos 2\pi \frac{f_0}{f_S}k = \cos 2\pi \frac{1}{2}k = \cos \frac{2\pi}{2}k = \cos \pi k = x(k)$$

$x(k) = \cos \pi k$

Eğerf frekansı $f_0 = 1$ Hz olan $x(t) = \cos 2\pi t$ sinyali $f_S \geq 2f_0$ kuralı gereği $f_S = 2$ Hz frekansı ile sağlıklı olarak örneklendiğinde, $x(k) = \cos \pi k$ ayrık sinyali oluşuyorsa buradan,

$$2\pi \frac{f_0}{f_S} = \frac{2\pi f_0}{f_S} = \frac{2\pi}{2} = \frac{\text{saykıl}}{\text{örnek sayısı}}$$

veya pratik olarak,

$$\frac{f_0}{f_S} = \frac{1}{2} = \frac{\text{saykıl}}{\text{örnek sayısı}}$$

yazılabilir. Eğer $f_0 = 2$ Hz alınırsa,

$$2\pi \frac{f_0}{f_S} = \frac{2\pi f_0}{f_S} = \frac{2\pi \times 2}{2} = \frac{4\pi}{2} = \frac{2\ \text{saykıl}}{2\ \text{örnek}}$$ **yanlış örnekleme (örtüşme, aliasing)**

Doğrusunun $f_S \geq 2f_0$ kural gereği, $\frac{2\ \text{saykıl}}{4\ \text{örnek}}$ olması gerekiğini biliyoruz ($f_S = 4$ Hz alınırsa). Bu durumda frekansı $f_0 = 1$ Hz olan $x(t) = \cos 2\pi t$ sinyali $f_S \geq 2f_0$ kuralı gereği $f_S = 2$ Hz frekansı ile sağlıklı olarak örneklendiğinde, $x(k) = \cos \pi k$ oluşmuşsa buradan,

$$2\pi \frac{f_0}{f_S} = \frac{2\pi f_0}{f_S} = \frac{2\pi \times 1}{2} = \frac{2\pi}{2} = \frac{1\ \text{saykıl}}{2\ \text{örnek}}$$ **sağlıklı örnekleme**

Örnek

$x(k) = 3\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)k$ Ayrık sinyalinin sağlıklı örneklenip örneklenmediğini araştırın.

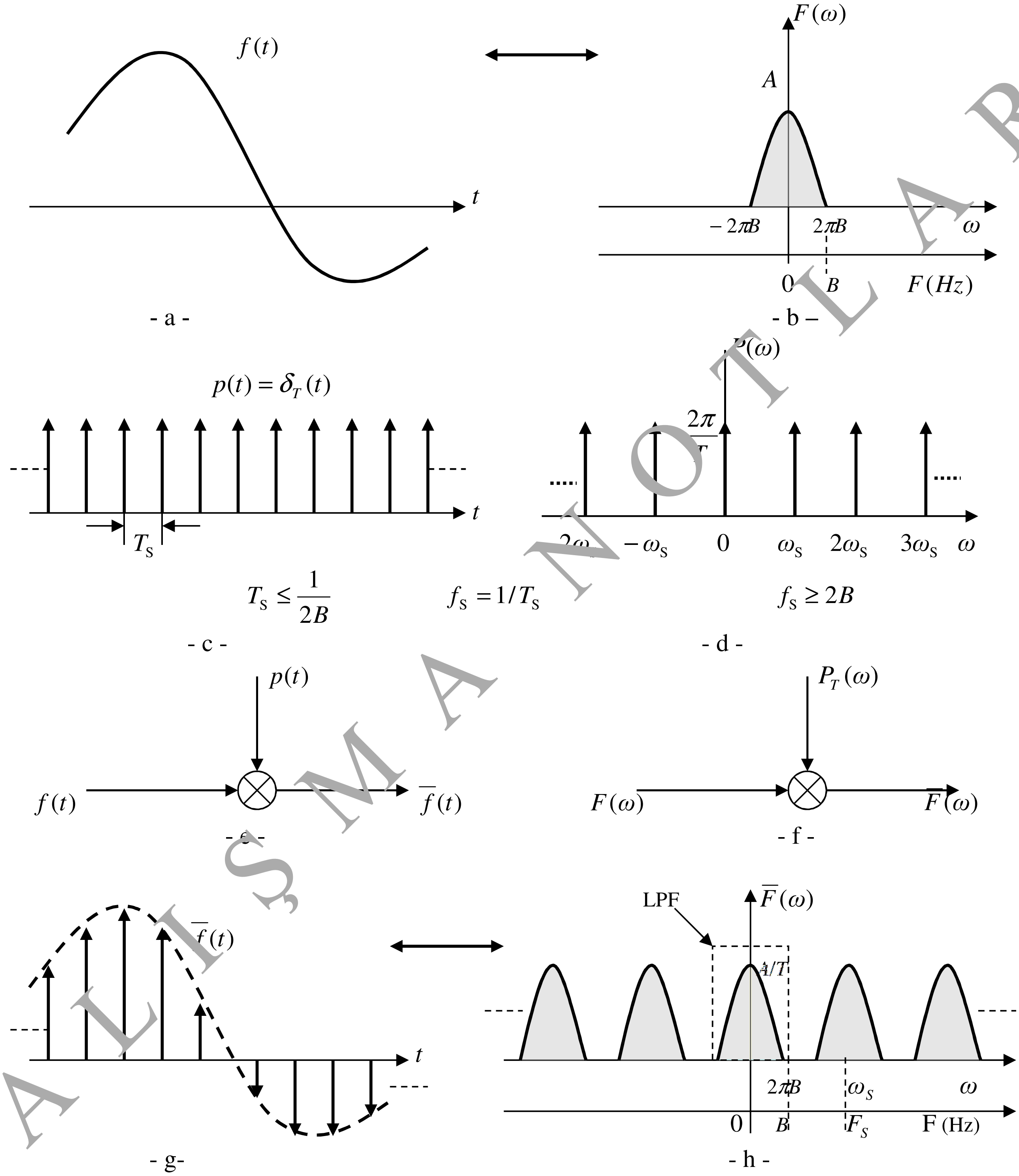
Çözüm

$$x(k) = 3\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)k = 3\sin\left(\frac{10\pi}{8}\right)k = 3\sin\left(\frac{5\times 2\pi}{8}\right)k$$

$$\frac{5\times 2\pi}{8} = \frac{5\ \text{saykıl}}{8\ \text{örnek}}$$ **yanlış örnekleme (örtüşme, aliasing)**

İDEAL ÖRNEKLEME

Aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi **ideal örnekleme kavramı**, (c) de kullanılan sıfır genişlikli **ideal impuls dizisinin** örnekleme fonksiyonu olarak kullanılmasından gelmektedir.



Şekil 2. İdeal örnekleme ve Fourier spektrumu

$$\overline{f}(t) = f(t) \times \delta_T(t)$$
$$= f(t)\; p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_S) = P(\omega)$$

$$\overline{f}(t) = f(t)\; p(t)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\; \delta_T(t - nT)$$

$$\overline{F}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_S)$$

Örnek

$f(t) = \mathrm{sinc}^2(5\pi\, t)$ işaretini 5, 10 ve 20 Hz lik örnekleme frekanslarına göre inceleyin

Çözüm

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$
$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f\left(\frac{-\omega}{\tau}\right)$$ **Dualite prensibi**

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t\tau}{4}\right) \leftrightarrow \frac{4\pi}{\tau} 2\pi\; \Delta\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

$$\frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t\tau}{4}\right) \leftrightarrow 2\pi\; \Delta\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \qquad f(t) = \mathrm{sinc}^2(5\pi\; t) \rightarrow \frac{\tau}{4} = 5\pi \rightarrow \tau = 20\pi$$

$$\mathrm{sinc}^2(5\pi\; t) \leftrightarrow \frac{4\pi}{20\pi}\; \Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right) = \frac{1}{5}\Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right) = 0.2\Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$

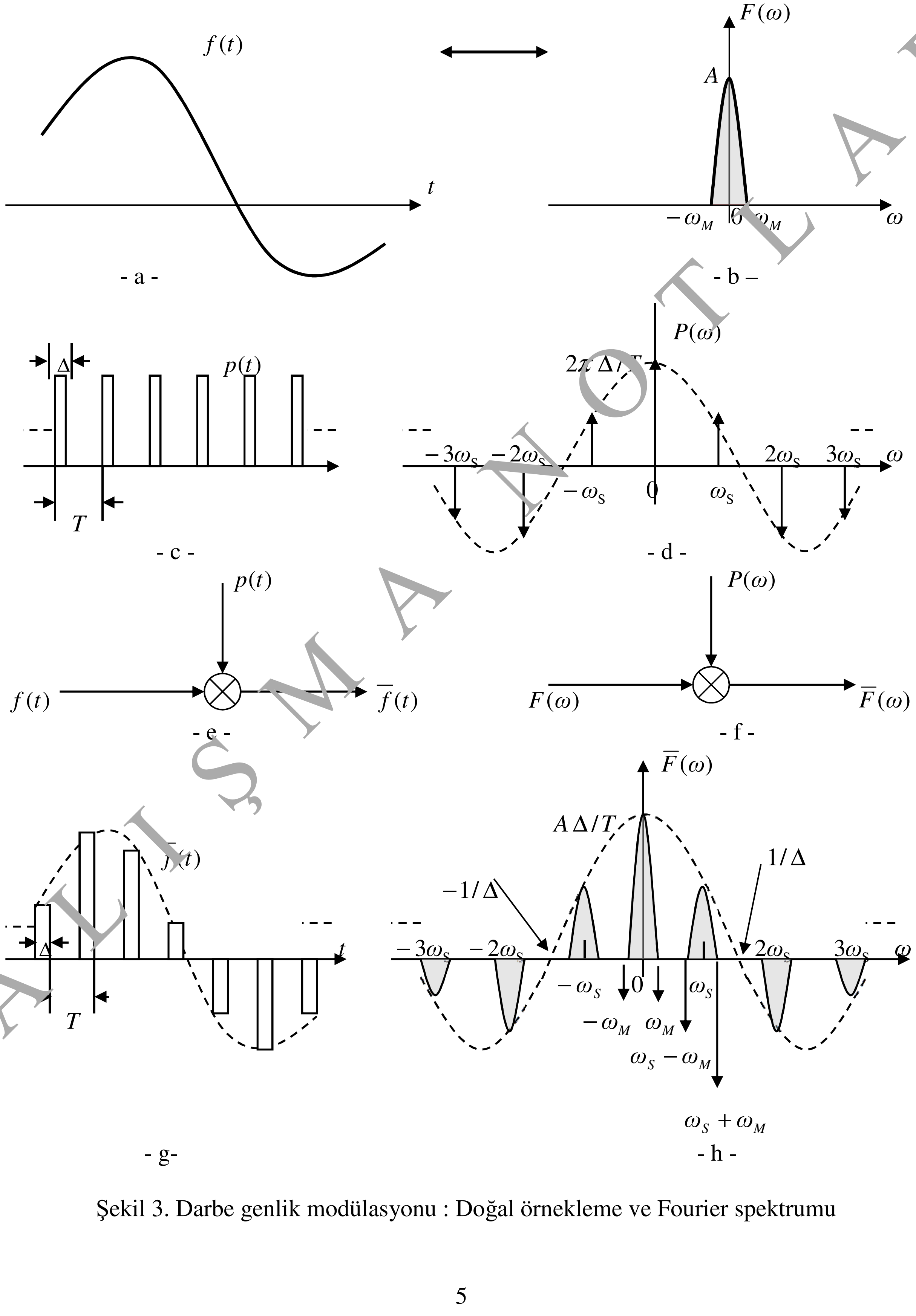
Tüm spektral genişlik $(-10\pi, 10\pi)$ olarak 20π ise simetriden dolayı band genişliği $\omega = 10\pi$ rad/s. $\rightarrow B = f = 5$ Hz

a) Bu durumda örnekleme frekansı $f_S = 5\, Hz$ için
$f_S = 5\, Hz$ örnekleme frekansı $f_S \geq 2B = 10\, Hz$ koşulunu sağlayamadığından örtüşme olacaktır.

b) $f_S = 10\, Hz$ için
$B = 5\, Hz$ olduğundan $f_S \geq 2B = 10 \geq 2 \times 5 = 10 = 10$ koşulu gereği kritik örnekleme söz konusudur.
c) $f_S = 20\, Hz$ için
$B = 5\, Hz$ olduğundan $f_S \geq 2B = 20 >> 2 \times 5 = 10$ koşulu gereği aşırı örnekleme söz konusudur.

PRATİK ÖRNEKLEME : İDEAL OLMAYAN ÖRNEKLEME

İdeal olmayan örneklemede, örnekleme fonksiyonu olarak sıfır genişliğindeki impuls dizisi yerine T periodlu Δ genişliğinde darbe dizisi kullanılmaktadır. Uygulamaya dönük oluşundan dolayı pratik örnekleme olarak da bilinir. Oluşan pratik örneklemin genel şeması aşağıda verilmiştir.



Şekil 3. Darbe genlik modülasyonu : Doğal örnekleme ve Fourier spektrumu

İşaretin Örneklerinden Elde Edilişi (Reconstruction)

Yeniden oluşturma (reconstruction) olarak bilinen bu proseste örneklenmiş işaret örneklerinden tekrar elde edilmeye çalışılmaktadır. Bunun için iki temel şartın : band-sınırlı (*B Hz*) işaret ve Nyquist oranının $f_S \geq 2B$ sağlandığını başından kabul ediyor ve bu şartlar altında yeniden oluşturma işlemini analiz edeceğimiz belirtmemiz gerekiyor.

Burada verilen band-sınırlı $f(t)$ işaretinin örneklenmiş $\overline{f}(t)$ işaretinden elde edilişi ele alınacaktır. Bu işlem yapılırken örneklenmiş işaretin ideal bir alçak geçiren filtreden geçirildiği göz önüne alınarak grafiksel bir yöntem izlenecektir. Hatırlanacağı gibi örneklenmiş işaret

$$\overline{f}(t) = f(t)\, p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

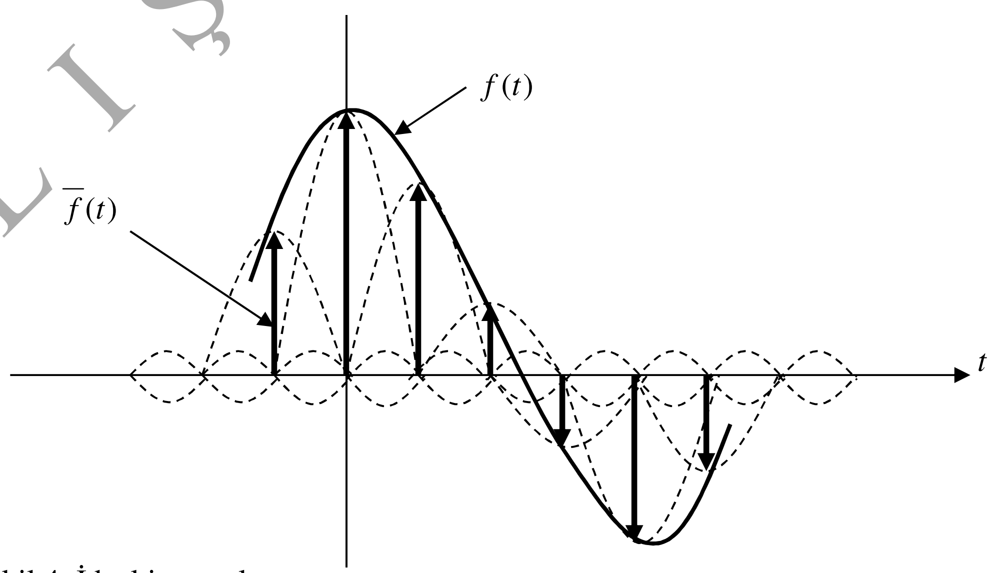
olarak elde edilmekteydi. Buradan tekrar $f(t)$ nin elde edilmesi için

$$f_r(t) = \overline{f}(t) * h(t)$$

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, h(t - nT)$$

YENİDEN ELDE ETME VE INTERPOLASYON

Yeniden oluşturma (reconstruction) olarak bilinen bu proseste örneklenmiş işaret örneklerinden tekrar elde edilmeye çalışılmaktadır. Bunun için iki temel şartın : band-sınırlı (*B Hz*) işaret ve Nyquist oranının $F_S \geq 2B$ sağlandığını başından kabul ediyor ve bu şartlar altında yeniden oluşturma işlemini analiz edeceğimiz belirtmemiz gerekiyor. Ingilizcesi “reconstruction” olarak bilinen bu işlemin diğer bir adı da “interpolasyon” dur. ***Interpolasyon veya teniden elde etme anlamına gelen reconstruction bir anlamda örnek aralarının doldurulması anlamına gelmektedir.*** Bu tip interpolasyona ideal interpolasyon denilmektedir. Aşağıda ideal tip interpolasyonun zaman domenindeki görünümü verilmiştir.



Şekil 4. İdeal interpolasyon

Pratik Örnekleme ve Tutma Devresi

Örnekleme ve tutma devresinin amacı, değişen analog giriş sinyalini periyodik olarak örneklemek ve örneklemeyi, bir dizi sabit genlikli PAM düzeyine dönüştürmektir. Sinyal önce örneklendiğinden, ardından da bir sonraki örnek anına dek tutulduğundan sistem " örnekle – tut " olarak da anılmaktadır.

$$\overline{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$ **ideal örnekleme**

$$x_{ZOH}(t)=\overline{x}(t)*h_0(t)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\right]*h_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)h_0(t-nT)$$ **sıfır tutucu örnek**

AYRIK PERİYODİK SİNUSOİD İŞARETLER

Ayrık periodik bir işaret, sürekli-periodik işaretin örneklenmesiyle elde edilir. Diğer bir deyişle sürekli periodik işaret, yine periodik bir diziye dönüştürülür. Eğer sürekli periodik işaret sinusoid ise, örnekleme teorisi ile ayrık periodik sinusoid işaret elde edilir. Eğer bir sürekli periodik sinusoid işaret

$$f(t)=\cos\omega t$$

ise, bu işaretin ayrık formunu bulmak için verilen işaretin T örnekleme periodu olmak üzere $t=kT$ anlarında örneklendiği kabul edilir.

$$f(kT)=\cos\omega kT$$

oluşan ifadedeki "k" ayrık sürekli işaretlerdeki gibi ayrık zaman değişkenine karşılık gelirken, ωT ise ayrık mod olarak T örnekleme perioduyla belirlenen ayrık açısal hızdır (rad/örnek). Bunu kısaca Ω ile gösterirsek,

$$\Omega=\omega T$$

$$f(kT)=\cos\Omega k$$
$$=f[k]$$

veya ayrık işaret

$$f[k]=\cos\Omega k$$

olarak ifade edilir. Oluşan $f[k]=f(kT)$ kuralından, elde edilen $f[k]$ ayrık işaretindeki k.cı eleman $f(kT)$ sürekli-zaman işaretinin k.cı örneğine eşit olduğunu örnekleme teorisinden bilmekteyiz. Literatür veya çeşitli kaynaklarca $f[k]$ ayrık işareti alternatif olarak

$$f(k)=\cos\Omega k$$

biçiminde de gösterilebilir. Buradan periodik bir işaretin ayrık formunun, diğer bir deyişle ayrık periodik bir işaretin periodunun incelenmesinde yarar vardır. Genel bir $f(t)$ işaretin periodikliği

$$f(t) = f(t+T)$$

ile tespit edildiğinden, benzer yaklaşımla $f[k]$ periodik işaretinin de

$$f[k] = f[k+N_0]$$

gibi olması gerektiğini düşünebiliriz. Bu nedenle öncelikle ayrık bir sinusoid işaretin periodik olma koşulunu incelememiz gerekiyor. Buna göre periodik ayrık işaret $f[k] = \cos \Omega k$ olarak düşünülürse, bunun periodik olması için, ele alınan $f[k] = \cos \Omega k$ ayrık periodik işaretin

$$\cos \Omega(k+N_0) = \cos(\Omega\, k + \Omega N_0) = \cos \Omega k$$

olması gerekeceğinden, bunun sağlanması için

$$\Omega N_0 = 2\pi\, m$$

olması gerektiğini biliyoruz. Burada gerek N_0 gerekse m değerlerinin tamsayı olduğunu bilelim ($N_0, m \in Z$). İfadedeki m değişkeninin

$m =$ **saykıl sayısı**

olduğunu düşünebiliriz. Bununla ayrık sinusoid işaretin m tane saykıldan oluştuğunu düşünebilir ve bu saykıllardaki toplam örnek sayısını göz önüne alabiliriz.Buna göre periodik ayrık işaretin bir saykılındaki (orijinal işaretin zarfında) N_0 örnek sayısı

$$N_0 = m\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)$$

Buna göre böyle ayrık bir işaretin en azından periodu da ayrık olarak bir tamsayı değişkeni ile gösterilecektir. Örneğin böyle bir ayrık period N_0 ise, bunun anlamı bu period belirli sayıda örnek sayısını içerecek bir tam sayı değişkeni olacaktır ($N_0 \in Z$). Çünkü ayrık periodik sinusoid işaret, belirli bir periodunda belli sayıda örnek içeren işaret demektir.

Örnek

$x(k) = 2\sin\left(\frac{17\pi}{25}\right)k$ Ayrık sinyalinin sağlıklı örneklenip örneklenmediğini araştırın.

Çözüm

$$x(k) = 2\sin\left(\frac{17\pi}{25}\right)k = 2\sin\left(\frac{34\pi}{50}\right)k = 5\cos\left(\frac{17\times 2\pi}{50}\right)k$$

$\frac{17\times 2\pi}{50} = \frac{17 \text{ saykıl}}{50 \text{ örnek}}$ **sağlıklı örnekleme**

Görüldüğü gibi sağlıklı örnekleme durumu için 17 saykıl için minimum 34 örnek gerekli iken, bunun yerine daha fazla olarak 50 örnek alınmıştır (over sampling). Dolayısıyla örnekleme ve ayrık sinyal sağlıklıdırç

Örnek

$f[k]=\cos(0.8k)$ periodic sinusoidinin periodunu bulalım

Çözüm

$f[k]=\cos(0.8k)$ işaretinin ayrık açısal hızı, $\Omega=0.8$ buradan ayrık periodun ise

$$N_0=m\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)=m\left(\frac{2\pi}{0.8}\right)=m\frac{5\pi}{2}$$

olduğu görülür. Burada N_0 ve $m\in Z^+$ olması gerekeceğinden en küçük pozitif tam sayı olarak $m=\frac{2}{\pi}$ alındığı taktirde ancak period $N_0\in Z^+$ olabilir. Ancak bu durumda da seçilen m saykıl sayısı,

$$m=\frac{2}{\pi}\notin Z^+ \quad , \quad N_0=17 \text{ örnek / saykıl.}$$

olarak tamsayı olamayacağından $f[k]=\cos(0.8k)$ ayrık işareti periodic değildir. Dolayısıyla hesaplanması söz konusu değildir.

Örnek

$x(t)=4\cos 300\pi\, t$ işaretinin

a) Örtüşme oluşturmayacak minumum örnekleme oranını,

b) Eğer işaret $f_S=300\,\text{Hz}$ örnekleme frekansıyla örneklenirse örneklenmiş işareti,

c) $f_S=200\,\text{Hz}$ ile örneklenirse oluşan işareti ve bu işarete denk frekanstaki sinusoidin frekansını, bulun.

Çözüm

a) $x(t)=4\cos 2\pi(150)t$ olarak yazılabilecek sürekli-zaman işaretinin frekansı $f=150\,\text{Hz}$ olduğundan minumum örnekleme oranının $f_S=2f$ gereğince $f_S=2\times 150=300\,\text{Hz}$ olması gerekir.

b) $x(t)=4\cos 300\pi\, t$ işareti $f_S=300\,\text{Hz}$ ile örneklenmek istenmektedir. Görüldüğü gibi $f_S=300\,\text{Hz}$ örnekleme frekansı işaret frekansı Nyquist kuralı gereği 150 Hz lik işaretin minumum oranına eşit olduğundan ($f_S=2f_0$) yine bir örtüşme söz konusu olmayacaktır. Bu koşullardaki örtüşmesiz işaret

$$\begin{aligned} x(n)&=4\cos(2\pi\frac{f_0}{f_S}\,n)=4\cos(2\pi\frac{150}{300}\,n)\\ &=4\cos\pi\, n \end{aligned}$$

Buna göre 2π periodluk görünen işaretten her bir π anında bir örnek alınmak üzere toplam iki örnek (minimum koşul) alınmaktadır.

c) $x(t) = 4\cos 300\pi\, t$ işareti bu kez $f_S = 200\,\text{Hz}$ ile örneklenirse $f_S \neq 2f_0$ kuralı gereğince örtüşme olacaktır. Bu durumda örtüşen ayrık işareti bulalım

$$x(n) = 4\cos(2\pi \frac{f}{f_S} n) = 4\cos(2\pi \frac{150}{200} n)$$

$$= 4\cos\frac{3\pi}{2} n$$

Not : Birbirlerinden 2π veya bunun *m* katlarıyla (2π) ayrılan sinusoidleri ayırt etmek mümkün değildi.

$$x(n) = 4\cos\frac{3\pi}{2}\, n = 4\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)n$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{2} n = x_a(n)$$

Buna göre, $\frac{3\pi}{2}$ frekanslı sinusoid ile $\frac{\pi}{2}$ frekanslı sinusoid bir birinin aynıdır ve ayırd edilmeleri mümkün değildir. Bu nedenle bu frekanslar örtüşme frekansları olarak anılırlar.

$$\cos\frac{3\pi}{2} n \equiv \cos\frac{\pi}{2} n$$

Diğer bir deyişle, $\frac{3\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{2}$ bir birlerinin örtüşme frekanslarıdır. Buna göre yüksek frekanstaki $\cos\frac{3\pi}{2} n$ sinusoidi daha düşük frekanstaki $\cos\frac{\pi}{2} n$ olarak algılanacaktır.

Örtüşmeye uğrayan sinusoidin bulunması :

$x(t) = 4\cos 300\pi\, t$ için $x(n) = 4\cos\frac{3\pi}{2} n$ oluşuyorsa

X $\qquad x_a(n) = 4\cos\frac{\pi}{2} n$

Cevap, $\mathbf{X} = x_a(t) = 4\cos 100\pi\, t$

Çünkü $\frac{3\pi}{2}$ frekansı $\frac{\pi}{2}$ frekansının üç katı ise, $x(t) = 4\cos 300\pi\, t$ sinyalindeki 300π nin üçte biri olan 100π cevap olarak bulunacaktır. 100π frekansı örtüşmeye uğramış sinusoidin örtüşme frekansı olarak değerlendirilmektedir ($\mathbf{X} = x_a(t) = 4\cos 100\pi\, t$). Buradan örtüşmeye uğramış sinyal,

$$x_a(t) = 4\cos 100\pi\, t = 4\cos 2\pi(50)t \rightarrow f_a = 50\,\text{Hz}$$

Buna göre gerçekte $f = 150$ Hz frekansındaki $x(t) = 4\cos 300\pi\ t$ sinyali örtüşmeden dolayı $f_a = 50$ Hz gibi daha düşük frekanstaki $x_a(t) = 4\cos 100\pi\ t = 4\cos 2\pi(50)t$ sinyali olarak algılanacaktır.

Pratik yol

Eğer $x_a(n)$ örtüşmüş sinyal ise bu sinyali ayrık zamandan geriye sürekli zaman uzayına giderek hangi sinyale eşdeğer olduğu bulunabilir.

$$x_a(n) = 4\cos\frac{\pi}{2}n = 4\cos 2\pi\frac{1}{4}n$$

$$x_a(n) = 4\cos 2\pi\frac{1}{4}n = 4\cos 2\pi\frac{f_a}{f_s}n = 4\cos 2\pi\frac{f_a}{200}n$$

$$\frac{1}{4} = \frac{f_a}{200} \rightarrow f_a = 50 \text{ Hz}$$

$$x_a(t) = 4\cos 2\pi f_a\ t = 4\cos 2\pi(f_a)\ t = 4\cos 2\pi(50)\ t = 4\cos 100\pi t$$

AYRIK ZAMAN FOURIER SERİSİ

Pratik olarak kullandığımız ayrık Fourier serisinin aslında, ayrık-zaman Fourier serisi (Discrete-Time Fourier Series, DTFS) olduğunu belirtelim. Bundan sonraki notlarımızda da ayrık Fourier serisi olarak kastedilenin, DTFS olduğunu unutmayalım.

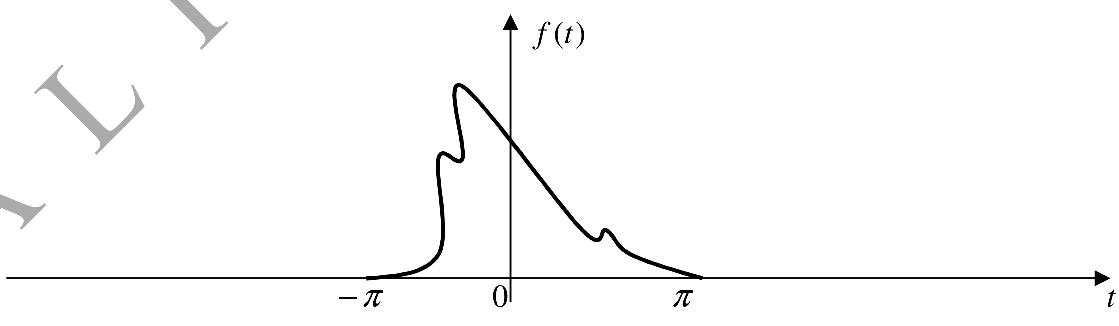
Ayrık – Zaman Exponensiyel Fourier Serisi

$$f[k] = \sum_{r=0}^{N_0-1} D_r\, e^{j r\, \Omega_0 k} = \sum_{r=0}^{N_0-1} D_r\, e^{j r \frac{2\pi}{N_0}k}$$

$$D_r = \frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N_0-1} f[k]\, e^{-j r\, \Omega_0 k} = \frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N_0-1} f[k]\, e^{-j r \frac{2\pi}{N_0}k}$$

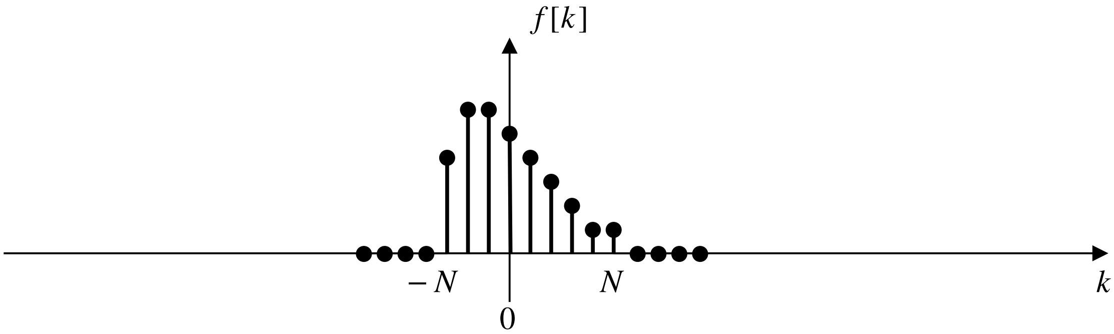
Ayrık – Zaman Fourier Serisi

AYRIK ZAMAN FOURIER TRANSFORMASYONU



Şekil 5. Periyodik olmayan sürekli işaret

Bu şeklin örnekleme teorisi yardımıyla yine periyodik olmayan ayrık formatı da aşağıdaki gibi düşünülecektir.



Şekil 6. Periyodik olmayan ayrık işaret

$$F(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, e^{-j\,\Omega k}$$ Ayrık-zaman Fourier transformasyonu (DTFT)

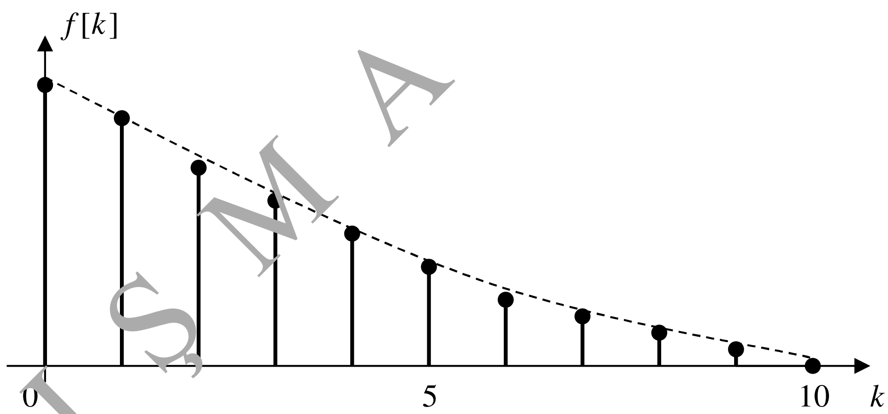
$$f[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} F(\Omega)\, e^{jk\Omega}\, d\Omega$$ Invers ayrık-zaman Fourier transformasyonu (IDTFT)

Örnek

$f[k] = (0.8)^k\, u[k]$ işaretinin DTFT nu bulun

Çözüm

$f[k]$ işaretinin değişimi yaklaşık aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 7. $f[k] = (0.8)^k\, u[k]$ işareti

İşareti $f[k] = \gamma^k u[k]$ şeklinde genelleştirerek ($\gamma = 0.8$) DTFT nu hesaplamaya çalışalım.

$$F(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, e^{-j\,\Omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma^k u(k)\, e^{-j\,\Omega k} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k e^{-j\,\Omega k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma\, e^{-j\,\Omega})^k$$

$$F(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma\, e^{-j\,\Omega})^k$$

$u[k]$ den dolayı $(-\infty,\infty)$ aralığı $(0,\infty)$ olarak alınmıştır. Elde edilen ifade geometrik bir dizi görüntüsünde olduğundan çözümü

$$\sum_{m=0}^{n} r^{m} = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \quad , \quad r \neq 1$$

veya

$$\sum_{m=0}^{n} r^{m} = 1 + r + r^{2} + r^{3} + \cdots + r^{n} = \frac{1}{1-r} \quad , \quad |r| < 1$$

olacaktır. Burada eğer $r = \gamma e^{-j\,\Omega}$ gibi kabul edilirse $F(\Omega)$

$$F(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma e^{-j\,\Omega})^{k} = \frac{1}{1-(\gamma e^{-j\,\Omega})} \quad , \quad |\gamma e^{-j\,\Omega}| < 1$$

$$F(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma e^{-j\,\Omega})^{k} = \frac{1}{1-(\gamma e^{-j\,\Omega})} \quad , \quad |\gamma|\,|e^{-j\,\Omega}| < 1$$

$$|e^{-j\,\Omega}| = 1$$

$$F(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma e^{-j\,\Omega})^{k} = \frac{1}{1-(\gamma e^{-j\,\Omega})} \quad , \quad |\gamma| < 1$$

Tespit : Buradan önemli bir sonuç ortaya çıkıyor. Ayrık zaman Fourier transformasyonu olan $F(\Omega)$, $f[k] = (0.8)^{k}u[k]$ tipli işaretlerde işaret $f[k] = (\gamma)^{k}u[k]$ olduğunda, $\gamma > 1$ durumu için DTFT mevcut değildir. Diğer bir deyişle DTFT, $(\gamma)^{k}$ gibi üstel artan işaretlerde $\gamma > 1$ için çözüm üretememektedir. Bu DTFT nin aynen sürekli-zaman Fourier transformasyonundakine benzer handikapa sahip olduğunu göstermektedir. Sürekli zamanda artan eksponensiyel işaretler için çözüm getirememekteydi. Onun bu dezavantajı, Laplace transformasyonuyla giderilmişti. Şimdi ise ayrık durumdaki DTFT nun $f[k] = (\gamma)^{k}u[k]$, $\gamma > 1$ üstel artan yöndeki çözümü bir sonraki bölümde ele alınacak, **Z transformasyonu** ile giderilecektir.

Bizim örneğimiz $f[k] = (0.8)^{k}u[k]$ işaretinde $\gamma = 0.8 < 1$ olduğu için çözüme sahiptir. Bu yönde devam edersek, aşağıdaki aşamalardan geçerek DTFT, yani $F(\Omega)$ elde edilecektir.

$$F(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{k} = \frac{(\gamma e^{-j\Omega})^{\infty+1}-1}{\gamma e^{-j\Omega}-1}$$

$$= \frac{1}{1-\gamma e^{-j\Omega}}$$

olarak elde edilir. Buradan Fourier transformasyonunun olabilmesi ve işaretin belirsizliğe sürüklenmemesi için $|\gamma e^{-j\Omega}| < 1$ olması gerekiyor. Ayrıca $|e^{-j\Omega}| = 1$ olduğunu düşünecek olursak $|\gamma| < 1$ olacaktır, aksi durumda ($|\gamma| > 1$) yakınsama olmayacaktır. Bu durumda $F(\Omega)$

$$F(\Omega) = \frac{1}{1-\gamma e^{-j\Omega}}$$

yazılabilecektir. İfade exponensiyel ifadenin açılımı olan Euler'e göre düzenlenirse

$$F(\Omega) = \frac{1}{1-\gamma e^{-j\Omega}}$$

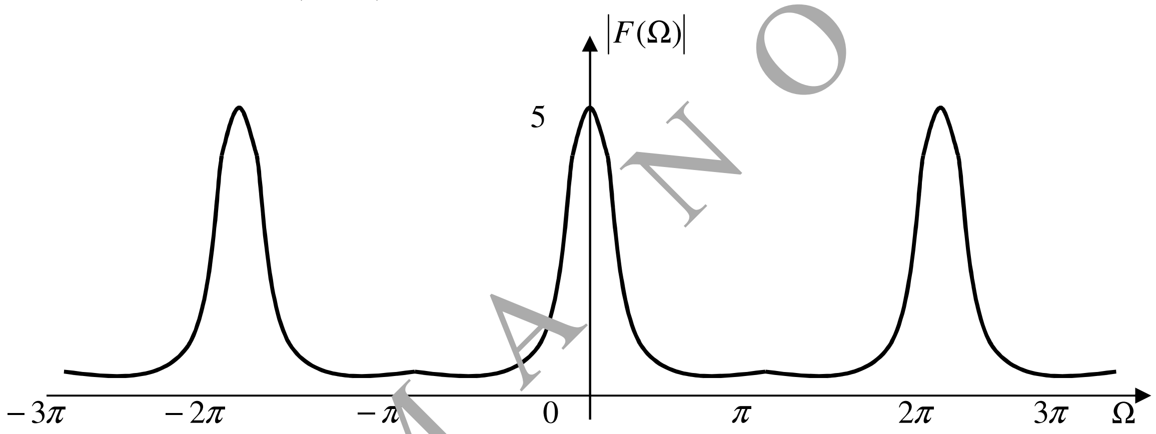
$$= \frac{1}{1-\gamma\cos\Omega + j\gamma\sin\Omega}$$

Buradan genlik spektrumu $|F(\Omega)|$ için

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{|1-\gamma\cos\Omega + j\gamma\sin\Omega|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma\cos\Omega)^2 + (\gamma\sin\Omega)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2 - 2\gamma\cos\Omega}}$$

elde edilir. Buna göre $|F(\Omega)|$ aşağıdaki görünümde olacaktır.



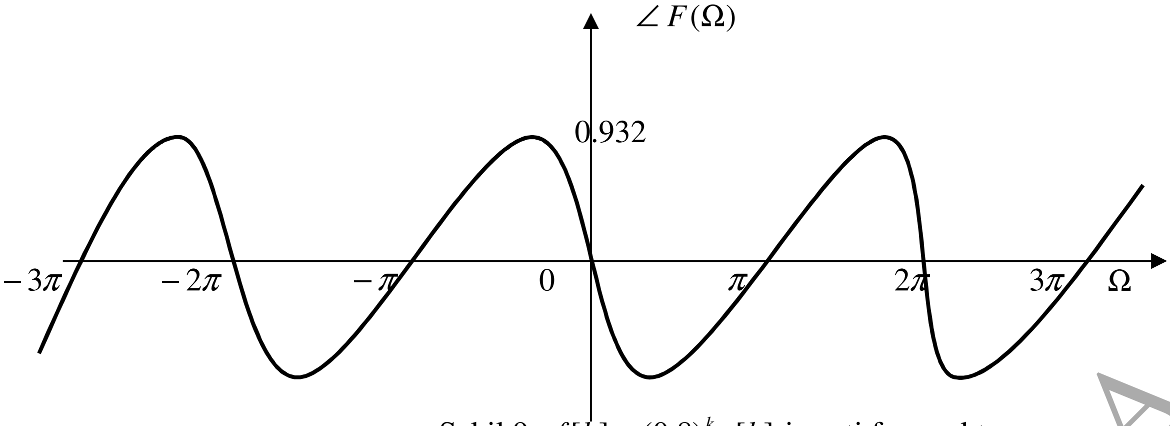
Şekil 8. $f[k] = (0.8)^k u[k]$ işareti genlik spektrumu

Görüldüğü gibi $|F(\Omega)|$ çift fonksiyon olup bileşenler arasındaki aralık 2π dir.

Faz spektrumu $\angle F(\Omega)$ ise

$$\angle F(\Omega) = -\tan^{-1}\left[\frac{\gamma\sin\Omega}{1-\gamma\cos\Omega}\right]$$

olarak elde edilir.



Şekil 9. $f[k]=(0.8)^k\,u[k]$ işareti faz spektrumu

Ayrık Fourier Transformasyonu (DFT)

$$F_r=\sum_{k=0}^{N_0-1} f_k\, e^{-j\,r\,\Omega_0\,k} \quad , \quad \Omega_0=\omega_0 T=\frac{2\pi}{N_0}$$ Direkt Ayrık Fourier Transformasyonu

$$f_k=\frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N_0-1} F_r\, e^{j\,r\,\Omega_0\,k}$$ Invers Ayrık Fourier Transformasyonu

Direkt ve Ters Ayrık Zaman Fourier Transformasyonunun Hesaplanması

Dijital (sayısal) işaretlerin spektral (frekansa dayalı) analizleri DTFT ve IDTFT larının yani $F(\Omega)$ ve $f[k]$ ların hesaplanmasını gerektirmektedir.

$$F(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, e^{-j\,\Omega\,k}$$

$$f[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} F(\Omega)\, e^{j\,k\,\Omega}\, d\Omega$$

$F(\Omega)$ nin ifadesinden görüldüğü gibi, sonsuz terimin toplamından oluşmaktadır. Ancak sayısal hesaplama platformları veya makineleri sonlu veya sınırlı hesaplama zamanına göre çalıştıklarından, sonsuz hesaplama mümkün olmayacaktır. Bu sorunu aşmak için $F(\Omega)$ nin örneklenmesiyle sonlu örneklerinden oluşan F_r ayrık Fourier transformasyonu (DFT) geliştirilmiştir.

DFT ve IDFT Üzerine

$$F_r=\sum_{k=0}^{N_0-1} f[k]\, e^{-j\,r\,\Omega_0\,k}$$ DFT

$$f[k]=\frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N_0-1} F_r\, e^{j\,r\,\Omega_0\,k}$$ IDFT

Görüldüğü gibi ayrık $f[k]$ işaretinin frekans analizinin yapılabilmesi için sonlu olmayan $F(\Omega)$ ayrık-zaman Fourier transformasyonu örneklenmiş ve örnekleme sonucunda sonlu ve ayrık formdaki F_r ayrık-Fourier transformasyonu (DFT) elde edilmiştir.

Örnek

Bir DFT ye ait $f[k]$ ayrık işareti 3-noktalı (3 elemanlı periyodik) olarak $f[-1]=f[0]=3$, $f[1]=2$ ve $f[k]=0$, $k=2,3,4,\cdots$ değerleri için tanımlı olduğuna göre,

a) F_r ayrık Fourier transformasyonunu (DFT) bulun.
b) $F(\Omega)$ ayrık zaman Fourier transformasyonunu (DTFT) bulun.

Çözüm

Verilen 3-noktalı dizi $f[k]=\{\cdots,\underbrace{3,\mathbf{3},2}_{DFT},3,3,2,3,\cdots\}$ Dizisi göz önüne alındığında $f[-1]=f[0]=3$, $f[1]=2$ değerlerini sağladığı, bunun dışındakiler için sıfır olduğu bilgisi zaten verilmişti. Dizi yazımındaki koyu 3 gösteriminin, dizinin başlangıç elemanı olan sıfırıncı elemanını göstermektedir ($f[0]=\mathbf{3}$). Buna göre verilen $f[k]=\{3,\mathbf{3},2\}$ ayrık dizisine göre, F_r ayrık Fourier transformasyonu (DFT) aşağıdaki gibi hesaplanır.

a) $F_r=\sum_{k=0}^{N_0-1} f[k]\,e^{-j\,r\,\Omega_0\,k}$

$N_0=$ örnek sayısı

$\Omega_0=\dfrac{2\pi}{N_0}=$ temel ayrık frekans

$(-1,1)$ arasındaki 3-noktalı $f[k]=\{3,\mathbf{3},2\}$ dizinin DFT sini hesaplamak için $\Omega=(0,2\pi)$ arasında 3 bileşenin bulunması için temel frekans $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{3}$ olduğuna göre

$$F_r=\sum_{k=0}^{N_0} f[k]\,e^{-j\,r\,\Omega_0\,k}=\sum_{k=0}^{2} f[k]\,e^{-j\,r\frac{2\pi}{3}k}$$

Örnek sayısı (harmonikler) $N_0=3$, $f[k]=\{\mathbf{3},2,3\}$

$r=0$ için

$$F_0=\sum_{k=0}^{2} f[k]\,e^{-j(0)\frac{2\pi}{3}k}=\left(f[0]\,e^{-j(0)\frac{2\pi}{3}(0)}+f[1]\,e^{-j(0)\frac{2\pi}{3}(1)}+f[2]\,e^{-j(0)\frac{2\pi}{3}(2)}\right)$$

$$=(3\,e^0+2\,e^0+3\,e^0)=8$$

$F_0=8$

$r=1$ için

$$F_1=\sum_{k=0}^{2} f\left[k\right]\, e^{-j\,(1)\,\frac{2\pi}{3}\,k}=\left(f\left[0\right]\, e^{-j\,(1)\,\frac{2\pi}{3}\,(0)}+f\left[1\right]\, e^{-j\,(1)\,\frac{2\pi}{3}\,(1)}+f\left[2\right]\, e^{-j\,(1)\,\frac{2\pi}{3}\,(2)}\right)$$

$$=\left(3\, e^{0}\; +2\, e^{-j\;\frac{2\pi}{3}}+3\, e^{-j\;\frac{4\pi}{3}}\right)=\left(3+2\, e^{-j\;\frac{2\pi}{3}}\;+3\, e^{-j\;\frac{4\pi}{3}}\right)$$

$$=\left(3+2\cos\frac{2\pi}{3}-2j\sin\frac{2\pi}{3}+3\cos\frac{4\pi}{3}-3j\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\left(3+2(-\frac{1}{2})-2j(\frac{\sqrt{3}}{2})+3(-\frac{1}{2})-3j(-\frac{\sqrt{3}}{2})\right)=\left(3-(\frac{2+3}{2})+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left((\frac{6-5}{2})+j(\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$$

$$=\left((\frac{6-5}{2})+j(\frac{\sqrt{3}}{2})\right)=0.5+j0.866=e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$F_1=e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$r=2$ için

$$F_2=\sum_{k=0}^{2} f\left[k\right]\, e^{-j\,(2)\,\frac{2\pi}{3}\,k}=\left(f\left[0\right]\, e^{-j\,(2)\,\frac{2\pi}{3}\,(0)}+f\left[1\right]\, e^{-j\,(2)\,\frac{2\pi}{3}\,(1)}+f\left[2\right]\, e^{-j\,(2)\,\frac{2\pi}{3}\,(2)}\right)$$

$$=\left(3\, e^{0}\; +2\, e^{-j\;\frac{4\pi}{3}}+3\, e^{-j\;\frac{8\pi}{3}}\right)=\left(3+2\, e^{-j\;\frac{4\pi}{3}}\;+3\, e^{-j\;\frac{8\pi}{3}}\right)$$

$$=\left(3+2\cos\frac{4\pi}{3}-2j\sin\frac{4\pi}{3}+3\cos\frac{8\pi}{3}-3j\sin\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$=\left(3+2(-\frac{1}{2})-2j(-\frac{\sqrt{3}}{2})+3(-\frac{1}{2})-3j(\frac{\sqrt{3}}{2})\right)=\left(3-(\frac{2+3}{2})-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left((\frac{6-5}{2})-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.5-j0.866=e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$F_2=e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

Elde edilen DFT değerleri : $F_0=8$, $F_{-1}=e^{-j\frac{\pi}{3}}$, $F_1=e^{j\frac{\pi}{3}}$

b) DFT dizisi , 3-noktakı $f\left[k\right]$ işareti olarak $(-1,1)$ aralığında periyodik 3 elemanlı olduğundan $F(\Omega)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left[k\right]e^{-jk\Omega}$$

$$F(\Omega)=\sum_{k=-1}^{1} f\left[k\right]e^{-jk\Omega}=(\left[-1\right]e^{-j(-1)\Omega}+\left[0\right]e^{-j(0)\Omega}+\left[-1\right]e^{-j(1)\Omega})=(3\,e^{j\,\Omega}+3\,e^{j\,0\,\Omega}+2\,e^{-j\,\Omega})$$

$$=(3\,e^{j\,\Omega}+3+2\,e^{-j\,\Omega})$$

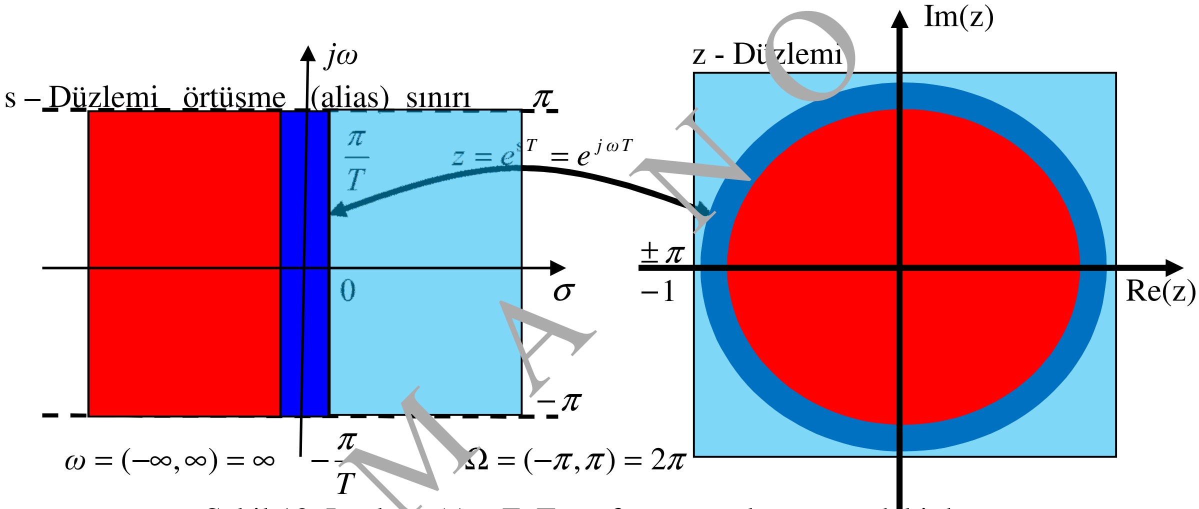
$$F(\Omega)=3\,e^{j\,\Omega}+3+2\,e^{-j\,\Omega}$$

Z TRANSFORMASYONU

Z transformasyonu aslında ayrık sistem analiz yöntemidir. Sürekli formdaki Laplace transformasyonunun özelliklerini, Z transformasyonu ayrık sistemler için benzer biçimde icra etmektedir. Bu anlamda işaret veya sistem açısından daha ziyade bir sistem yaklaşımı olan Z transformasyonu, özellikle ayrık sistemlerin zaman – frekans analizlerini yerine getirmek üzere dizayn edilmiştir. Bu anlamda Laplace yaklaşımına benzer olarak bu kez ayrık formdaki differo-integral (fark – toplam) denklem sistemlerinin analizlerine yönelik çözümler sunmaktadır.

Laplace – Fourier transformasyonlarındaki yaklaşım bu kez ayrık Fourier – Z transformasyonu arasında söz konusudur. Buna göre ayrık Fourier transformasyonunun ($F(\Omega)$) yetersiz kaldığı $f[k]=a^k u[k]$, $a>1$ ayrık işaretlerin zaman – frekans analizleri Z transformasyonu yoluyla yapılabilmektedir. Z transformasyonu, bu tür işaretlerin sorunlarını çözmek üzere geliştirilen bir yöntem olarak da düşünülebilir.

Z – Laplace Transformasyonu



Şekil 10. Laplace (s) – Z Transformasyonları arasındaki dönüşüm

Z Tranformasyonu ve Yakınsama Bölgesi

Yukarıda Z transformasyonunu Laplace üzerinden analiz ederken, $s=\sigma+j\omega$ düzleminin $-\pi/T \le \omega \le \pi/T$ ve $\sigma=[0,\infty]$ kısımlarının dikkate alındığını gördük. Hatırlayacak olursak ayrık – zaman Fourier transformasyonunda

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$a>1$ olmak üzere $x[n]=a^n u[n]$ gibi işaretlerin $s=j\omega$ frekans düzleminde analizlerinin mümkün olamadığını gördük.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]\, e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{e^{j\Omega}}\right)^n$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{e^{j\Omega}}\right)^{n}=\left(\frac{a}{e^{j\Omega}}\right)^{0}+\left(\frac{a}{e^{j\Omega}}\right)^{1}+\left(\frac{a}{e^{j\Omega}}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{a}{e^{j\Omega}}\right)^{n}=1+\left(\frac{a}{e^{j\Omega}}\right)^{1}+\left(\frac{a}{e^{j\Omega}}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{a}{e^{j\Omega}}\right)^{n}$$

Buradan $X(\Omega)$ ayrık Fourier transformasyonunun bir tür geometrik seri yapısında olduğu görülmektedir. Eğer,

$$\left|\frac{a}{e^{j\Omega}}\right|=\frac{|a|}{\left|e^{j\Omega}\right|}=\frac{|a|}{1}=|a|$$

olduğu düşünülürse, seri aşağıdaki formda olacaktır.

$$1+\left|\frac{a}{e^{j\Omega}}\right|+\left|\frac{a}{e^{j\Omega}}\right|^{2}+\left|\frac{a}{e^{j\Omega}}\right|^{3}+\cdots+\left|\frac{a}{e^{j\Omega}}\right|^{n}=1+|a|+|a|^{2}+|a|^{3}+\cdots+|a|^{n}$$

Bu durumda $a>1$ olması halinde $X(\Omega)$ Ayrık Fourier Transformasyonunun **çözümü yoktur**. Çünkü $a>1$ halinde örneğin, $a=2$ alınırsa, seri sonsuza gidecektir.

$$X(\Omega)=1+|a|+|a|^{2}+|a|^{3}+\cdots+|a|^{n}=1+2+2^{2}+2^{3}+\cdots+2^{n}\to\infty$$

Ancak bunun yerine eğer Z transformasyonu dikkate alınsaydı, $x[n]=a^{n}u[n]$, $a>1$ sinyali,

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{n}u[n]\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}\,\frac{1}{z^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n}}{z^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{n}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{n}=\left(\frac{a}{z}\right)^{0}+\left(\frac{a}{z}\right)^{1}+\left(\frac{a}{z}\right)^{2}+\left(\frac{a}{z}\right)^{3}+\cdots+$$

$$=1+\frac{a}{z}+\left(\frac{a}{z}\right)^{2}+\left(\frac{a}{z}\right)^{3}+\cdots+$$

Bu haliyle karşımızda tam anlamıyla bir $X(z)$ Geometric serisi söz konusudur. Bununla ilgili Geometric seri kuralını hatırlayalım.

Kural : $\sum_{m=0}^{n}r^{m}=1+r+r^{2}+r^{3}+\cdots+r^{n}=\dfrac{1}{1-r}$, $|r|<1$

Kuralı $X(z)$ Geometrik serisine uyarlarsak,

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{n}=1+\frac{a}{z}+\left(\frac{a}{z}\right)^{2}+\left(\frac{a}{z}\right)^{3}+\cdots+=\frac{1}{1-\dfrac{a}{z}}\quad,\quad\left|\frac{a}{z}\right|<1$$

Buradan ifade $r=\dfrac{a}{z}\to|r|=\left|\dfrac{a}{z}\right|$ olarak düzenlenirse $|r|<1$ koşulu gereği çözüme gidilebilir.

$\left|\dfrac{a}{z}\right|<1$ veya $\dfrac{|a|}{|z|}<1\to|a|<|z|$

Bu sonuca göre sonucu ayrık Fourier transformasyonuyla çözümü mümkün olmayan $x[n] = a^n u[n]$, $a > 1$ sinyalinin Z Transformasyonuyla çözümü $|a| < |z|$ olarak elde edilmiştir. Bu sonuçla serideki $(a/z)^n$ ifadesinin en azından belli bir b değerine yakınsayabilmesi $(a/z)^n \to b$ veya $(a/z)^n \to 0$ olarak sönümlenebilir olabilmesi için $|a| < |z|$ koşulunun gerekli olduğu görülecektir. Analizi alternatif olarak Z transformasyonu üzerinden dahada genelleyebiliriz.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Bu kez $a > 1$ olmak üzere $x[n] = a^n u[n]$ gibi işaretlerin $s = \sigma + j\omega$ düzleminde analiz edilebileceğini görebiliyoruz.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,(e^{(\sigma+j\omega)T})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]\,(e^{(\sigma+j\omega)T})^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\,(e^{(\sigma+j\omega)T})^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right)^n$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right)^n = \left(\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right)^0 + \left(\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right)^1 + \left(\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right)^n$$

$$= 1 + \left(\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right)^1 + \left(\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right)^n$$

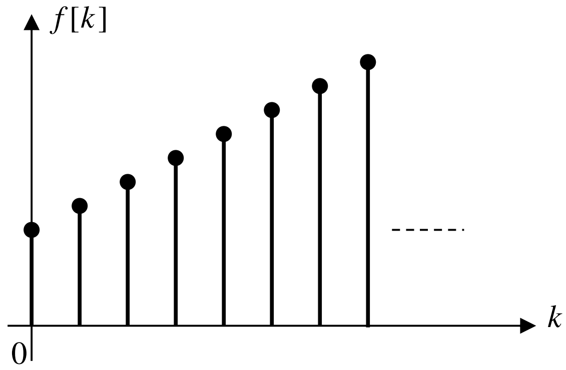
$$\left|\frac{a}{e^{(\sigma T+j\omega T)}}\right| < 1 \;\; \rightarrow \;\; \begin{aligned} |a| < \left|e^{(\sigma T+j\omega T)}\right| &= |a| < \left|e^{\sigma T}\right|\left|e^{j\omega T}\right| \\ &= |a| < \left|e^{\sigma T}\right| \end{aligned}$$

Buna göre, $r = e^{\sigma T}$ olduğundan $r = e^{\sigma T} > |a|$ bir **çözümdür**. Eğer $a > 1$ ise, yarıçapı $r > |a|$ olan çember çözüm olacaktır. Diğer bir deyişle **çözüm, yani yakınsama bölgesi (Region Of Convergence, ROC) birim çemberin dışındadır**. Bu yüzden $a > 1$ olmak üzere $x[n] = a^n u[n]$ gibi işaretlerin $X(\Omega)$ Ayrık – Zaman Fourier transformasyonunda bulunamayan çözümlerinin, $X(z)$ Z transformasyonuyla mümkün olabildiğini görmekteyiz. Bunu sağlayanın $r = e^{\sigma T}$ yaklaşımından görülebildiği gibi $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin reel (σ) kısmının da çözüme dahil edilmesidir.

Çözümün birim çemberin dışında olmasının sistemin bu aralıkta kararlı davranışını nasıl etkileyeceğine bakmak gerekir. Eğer $a > 1$ ve $r > a$ bir çözümse, $r = e^{\sigma T} > 1$ eşitliğinin sağlanabilmesi için çözüm için $\sigma > 0$ olması gerekeceğinden, Laplace düzleminin kararlı sol yarı düzlemindeki $\sigma = [-\infty, 0]$ aralığının dışındaki değerlerinin çözüm ve sistem davranışında etkili olacağını görmekteyiz.

Z Transformasyonun Elde Edilmesi

Bunun için hem örnekleme hemde ayrık-zaman Fourier transformasyonundaki tecrübelerimizi göz önüne alarak az önce yukarıda değinilen $f[k] = (a)^k u[k]$, $a > 1$ tipli işaretlerin nasıl DTFT nin alınabilir haline getirilebileceğine yoğunlaşmaya çalışacağız. Bunun için $f[k] = a^k u[k]$ işaretinin DTFT nu bulnak üzere $f[k]$ işaretinin değişiminin yaklaşık aşağıdaki gibi olduğu kabul edilecektir.



Şekil 11. $f[k]=a^k u[k]$ işareti

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\,z^{-k}$$ **Z – Transformasyonu**

$$f[k]=\frac{1}{2\pi j}\oint F[z]\,z^{k-1}dz$$ **Invers Z - Transformasyonu**

Örnek

$f[k]=\{1,\mathbf{2},-1,1\}$ ayrık işaretinin Z transformasyonunu ve ayrık zaman Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

$f[k]=\{1,\mathbf{2},-1,1\}$ ise, $f[k]=\{1,\mathbf{2},-1,1\}$, diğer bir deyişle $f[0]=2$. Z transformasyonu

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\,z^{-k}=\sum_{k=-1}^{2} f[k]\,z^{-k}=f[-1]\,z^{-(-1)}+f[0]\,z^{-(0)}+f[1]\,z^{-(1)}+f[2]\,z^{-(2)}$$

$$=1\times z^{1}+2\times z^{0}+(-1)\times z^{-1}+1\times z^{-2}=z+2-z^{-1}+z^{-2}$$

$$=z+2+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$$

$$=\frac{z^3+2z^2+z+1}{z^2}$$

Ayrık zaman Fourier transformasyonu $z=e^{j\Omega}$ için elde edilecektir.

$$F(\Omega)=F(z=e^{j\Omega})=\frac{(e^{j\Omega})^3+2(e^{j\Omega})^2+e^{j\Omega}+1}{(e^{j\Omega})^2}=\frac{e^{j3\Omega}+2e^{j2\Omega}+e^{j\Omega}+1}{e^{j2\Omega}}$$

$$F(\Omega)=\frac{e^{j3\Omega}+2e^{j2\Omega}+e^{j\Omega}+1}{e^{j2\Omega}}$$

Örnek

$f[k]=(0.8)^k u[k]+(1.5)^k u[-(k+1)]$ Sinyalinin $F(z)$ olarak Z Transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

$f[k]=f_1[k]+f_2[k]$

$f_1[k]=(0.8)^k u[k]\leftrightarrow \dfrac{z}{z-0.8}=F_1(z)$, $|z|>0.8$ Nedensel (tek taraflı Z)

$f_2[k]=(1.5)^k u[-(k+1)]\leftrightarrow \dfrac{-z}{z-1.5}=F_2(z)$, $|z|<1.5$ Nedensel değil (çift taraflı Z)

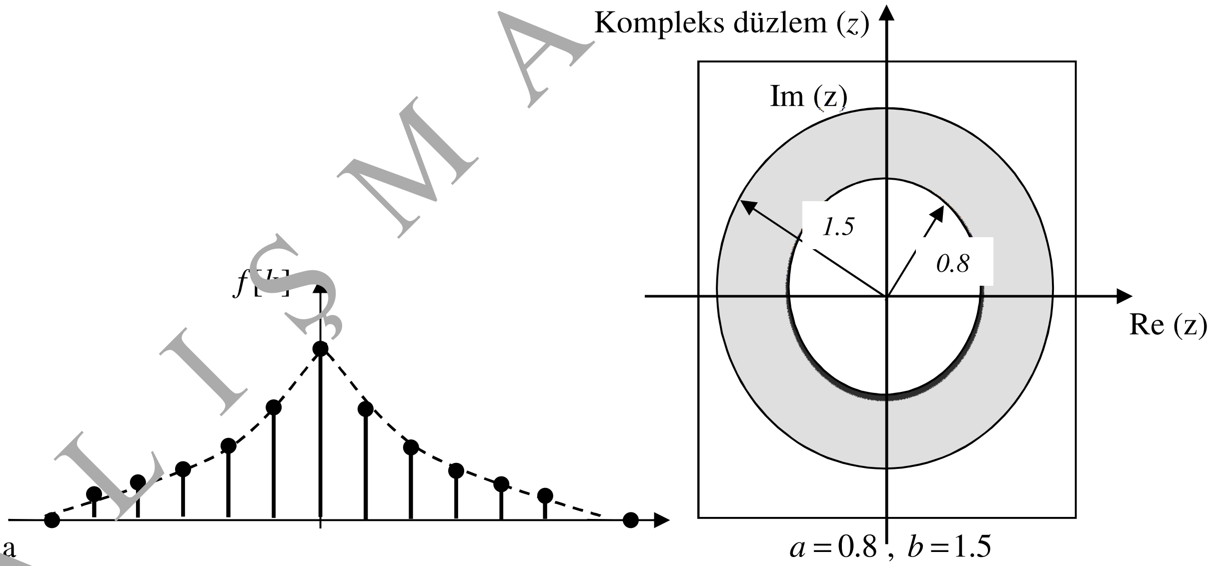
Kural : $f[k]=-a^k u[-k-1]\leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}=F[z]$, $|z|<|a|$

Kural : $f[k]=a^k u[k]\leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}=F[z]$, $|z|>|a|$

Kural : $y[k]=a^k u[k]-b^k u[-k-1]\leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}+\dfrac{z}{z-b}=Y(z)$, $a<z<b$

$f[k]=f_1[k]+f_2[k]$

$F(z)=\dfrac{z}{z-0.8}+\dfrac{-z}{z-1.5}$, $0.8<|z|<1.5$



Şekil 12. $f[k]=(0.8)^k u[k]+(1.5)^k u[-(k+1)]$ işaretinin yakınsama bölgesi ($|a|<|z|<|b|$)

Örnek

$f[k]=u[k]$ ise $F[z]=?$

Çözüm

$$F[z]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\,z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\frac{1}{z^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k}=\left(\frac{1}{z}\right)^0+\left(\frac{1}{z}\right)^1+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$$

Geometrik seri gözlemleniyor.

Kural : $1+x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{1}{1-x}\quad,\quad |x|<1$

$$F[z]=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\quad,\quad \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$F[z]=\frac{z}{z-1}\quad,\quad |z|>1$$

Kural : $u[k]\leftrightarrow\dfrac{z}{z-1}\quad,\quad |z|>1$

Örnek

$f[k]=\delta[k]$ Sinyalinin Z transformasyonunu hesaplayın ($F(z)=?$).

Çözüm

$$F(z)\equiv\sum_{k=0}^{\infty} f[k]\,z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[k]\,z^{-k}=1$$

$$\delta[k]\leftrightarrow 1$$

Örnek

$f[k]=\delta[k-k_0]$ Sinyalinin Z transformasyonunu hesaplayın ($F(z)=?$).

Çözüm

$$F[z]\equiv\sum_{k=0}^{\infty} f[k]\,z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[k-k_0]\,z^{-k}=z^{-k_0}$$

$$f[k]=\delta[k-k_0]\leftrightarrow X[z]=z^{-k_0}$$

$$\delta[k-k_0]\leftrightarrow z^{-k_0}$$

Örnek

$f[k] = \cos\beta\, k\, u[k]$ Sinyalinin Z transformasyonunu hesaplayın ($F(z) = ?$).

Çözüm

$$F(z) = \frac{z(z-\cos\beta)}{z^2 - 2z\cos\beta + 1} \quad , \quad |z| > 1$$

Kural : $\cos\beta\ k\ u[k] \leftrightarrow \dfrac{z(z-\cos\beta)}{z^2 - 2z\cos\beta + 1} \quad , \quad |z| > 1$

Örnek

$F[z] = \dfrac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$ Sinyalinin ters Z transformasyonunu hesaplayın ($f[k] = ?$).

Çözüm

$$F[z] = \frac{8z-19}{(z-2)(z-3)} = \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z-3}$$

$$= \frac{(c_1 + c_2)z - 3c_1 - 2c_2}{(z-2)(z-3)}$$

$$c_1 + c_2 = 8$$

$$-3c_1 - 2c_2 = -19$$

$$c_1 = 3 \quad , \quad c_2 = 5$$

$$F[z] = \frac{3}{z-2} + \frac{5}{z-3}$$

buradan $F[z]$ nin invers Z transformasyonu alınırsa

$$Z^{-1}\{F[z]\} = Z^{-1}\left[\frac{3}{z-2} + \frac{5}{z-3}\right]$$

$$= [3(2)^{k-1} + 5(3)^{k-1}]\,u[k-1]$$

$$f[k] = [3(2)^{k-1} + 5(3)^{k-1}]\,u[k-1]$$

Kural : $\gamma^{k-1}u[k-1] \leftrightarrow \dfrac{1}{z-\gamma}$

Z Transformasyonunun Var Olması

Önceki işaret transformasyonlar gibi, Z transformasyonunun da var olduğunu gösteren koşullar mevcuttur. Eğer genel hali göz önüne alınırsa,

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, z^{-k}$$

Z transformasyonunun var olabilmesi için $\left| F(z) \right| < \infty$ koşulunun sağlanması gerekmektedir.

$$\left| F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, z^{-k} \right| < \infty$$

$$= \left|F(z)\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, z^{-k}\right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f[k] \left[e^{\sigma + j\Omega}\right]^{-k} \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f[k] \left[e^{\sigma}\right]^{-k} \left[e^{j\Omega}\right]^{-k} \right|$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f[k] \left[e^{\sigma}\right]^{-k} \right| \left| \left[e^{j\Omega}\right]^{-k} \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f[k] \left[e^{\sigma}\right]^{-k} \right| \left| \left[e^{j\Omega}\right]^{-k} \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f[k] \left[e^{-\sigma}\right]^{-k} \right| \left| e^{-j\Omega k} \right|$$

$$\left| e^{-j\Omega k} \right| = 1 \qquad \text{ve} \qquad r = e^{\sigma}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f[k] \left[e^{\sigma}\right]^{-k} \right| \left| e^{-j\Omega k} \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f[k]\, r^{-k} \right| < \infty$$

Sonuçta $F(z)$ ile ifade edilen Z transformasyonunun var olabilmesi için

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f[k]\, r^{-k} \right| < \infty$ koşulunun sağlanması gerekir.

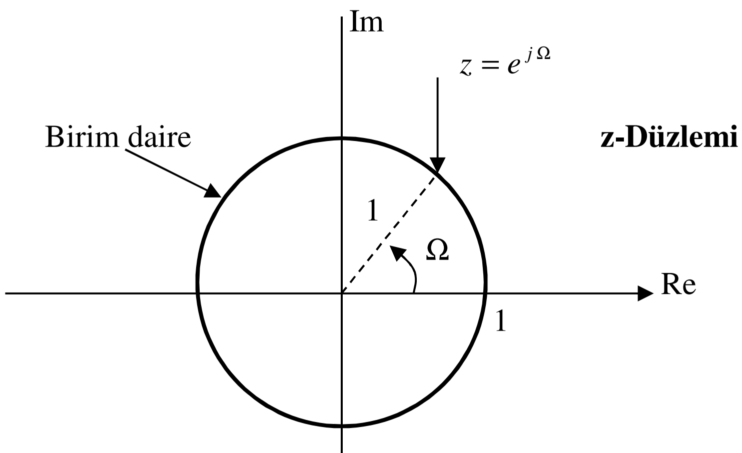
Z Transformasyonu ve Ayrık-Zaman Fourier Transformasyonu

Vurgulandığı gibi her iki transformasyona ait ifadeler aşağıdaki gibi mercek altına alınırsa

1. $F[z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, z^{-k} = F(z)$ **Z Transformasyonu**
2. $F(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, e^{-j\Omega k}$ **Ayrık-zaman Fourier transformasyonu (DTFT)**

$$F(\Omega) = F(z)\,|_{r=1,\sigma=0} = F(r\, e^{j\Omega})\,|_{r=1}$$
$$F(\Omega) = F(z) = F(e^{\sigma + j\Omega})\,|_{\sigma \to 0} = F(r\, e^{j\Omega})\,|_{r=1}$$

Bu kabulün ışığındaki z-kompleks düzlemdeki Z transformasyonun görünümü aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 13. z-Düzlemi : Ayrık-zaman Fourier transformasyonu yorumu

Z Transformasyonunun Özellikleri

1. Lineerlik

$f_1[k] \leftrightarrow F_1[z]$ ve $f_2[k] \leftrightarrow F_2[z]$

$c_1 f_1[k] + c_2 f_2[k] \leftrightarrow c_1 F_1[z] + c_2 F_2[z]$

Örnek

$f[k-4]\ u[k-4]$ Sinyalinin Z Transformasyonunu hesaplayın

Çözüm:

$f[k-4]\ u[k-4] \leftrightarrow z^{-4} F[z]$

Kural : $f[k-m]\ u[k-m] \leftrightarrow z^{-m} F[z] = \dfrac{1}{z^m} F[z]$

Örnek

$y(k) = x(k-3)u(k)$ Sinyalinin Z Transformasyonunu hesaplayın.

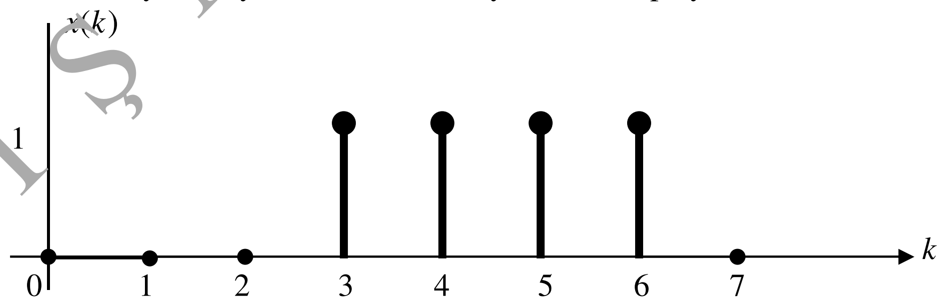
Çözüm

$x[k-3]u[k] \leftrightarrow z^{-3} X[z] + x[-3] + x[-2]\ z^{-1} + x[-1]\ z^{-2}$

Kural : $x[k-n]u[k] \leftrightarrow z^{-n} \left[\sum_{m=-n}^{-1} x[m]\ z^{-m} + X(z) \right]$

Örnek

Değişimi aşağıda verilen ayrık sinyalin Z transformasyonunu hesaplayın.



Şekil 14 Ayrık sinyal

Çözüm

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{7} x(k) z^{-k} = x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + x(4)z^{-4} + x(5)z^{-5} + x(6)z^{-6} + x(7)z^{-7}$$

$$= 0+0+0+\frac{x(3)}{z^3} + \frac{x(4)}{z^4} + \frac{x(5)}{z^5} + \frac{x(6)}{z^6} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6} = \frac{z^3+z^2+z+1}{z^6}$$

$$x(k) \leftrightarrow \frac{z^3+z^2+z+1}{z^6}$$

5. Konvülüsyon (convolution)

Z Transformasyonu ve Zaman Domeninde Konvülüsyon : $x(n) * h(n) = X(z)H(z)$
Z Transformasyonu ve Frekans Domeninde Konvülüsyon : Z Düzleminde Modülasyon :

$$x(n)h(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(z) * H(z)$$

$$x(n)h(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint X(u) H\left(\frac{z}{u}\right) u^{-1} du$$

Lineer Zamanla Değişmeyen Ayrık (LTID) Sistemin Cevabı

LTID sistemin cevabı araştırılırken sistemin bir z^k exponensiyel ifadeye karşı oluşturduğu cevabın $H[z]\,z^k$ olduğunu bildiğimize göre,

$$z^k \Leftrightarrow H[z]\,z^k$$

$$f[k] = \frac{1}{2\pi\, j} \oint F[z]\,z^{k-1} dz$$

Sistem çıkışı

$$y[k] = \frac{1}{2\pi\, j} \oint \underbrace{F[z]\,H[z]}_{Y[z]}\,z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi\, j} \oint Y[z]\,z^{k-1} dz$$

$$y[k] = \frac{1}{2\pi\, j} \oint Y[z]\,z^{k-1} dz$$

$$Y[z] = F[z]\,H[z]$$

Buradan sistem çıkışının, sistem girişi ve sistem transfer fonksiyonunun convolutionundan oluştuğu görülmektedir.

Lineer Fark Denklemlerinin Z Transformasyonuyla Çözümü

Sola veya sağa öteleme özelliğindeki sabit katsayılı linear zamanla değişmeyen ayrık (LTID) sistemlerin fark çözümleri, sürekli haldeki diferansiyel denklem çözümlerine benzemektedir. Ayrık sistemin fark denklemleriyle ifade edilen $y[k]$ cevabının önce z-dönüşümü yapılarak çözülmesiyle bulunan $Y[z]$ değeri son aşamada tekrar invers z-dönüşümüyle $y[k]$ olarak elde edilir.

Örnek

Giriş işareti $f[k] = (2)^{-k} u[k]$ ve başlangıç koşulları $y[-1] = \frac{11}{6}$, $y[-2] = \frac{37}{36}$ olan LTID sistemin verilen $y[k+2] - 5y[k+1] + 6y[k] = 3f[k+1] + 5f[k]$ fark denklemine göre cevabını bulun.

Çözüm

Önce verilen $y[k+2] - 5y[k+1] + 6y[k] = 3f[k+1] + 5f[k]$ denklemini $k = k-2$ olacak şekilde tekrar düzenleyerek tam bir fark denklem sistemi elde edelim.

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=3f[k-1]+5f[k-2]$$

Bu haldeyken z-dönüşümlerini yapalım.

$$y[k]\,u[k]\Leftrightarrow Y[z]$$

$$y[k-1]\,u[k]\Leftrightarrow \frac{1}{z}Y[z]+y[-1]=\frac{1}{z}Y[z]+\frac{11}{6}$$

$$y[k-2]\,u[k]\Leftrightarrow \frac{1}{z^2}Y[z]+\frac{1}{z}y[-1]+y[-2]=\frac{1}{z^2}Y[z]+\frac{11}{6z}+\frac{37}{36}$$

Aynı şekilde giriş işaretinin de z-dönüşümü yapılır.

$$f[k]=(2)^{-k}u[k]=(2^{-1})^k u[k]=(0.5)^k u[k]\Leftrightarrow \frac{z}{z-0.5}$$

$$f[k-1]u[k]\Leftrightarrow \frac{1}{z}F[z]+f[-1]=\frac{1}{z}\;\frac{z}{z-0.5}+0=\frac{1}{z-0.5}$$

$$f[k-2]u[k]\Leftrightarrow \frac{1}{z^2}F[z]+\frac{1}{z}f[-1]+f[-2]=\frac{1}{z^2}F[z]+0+0=\frac{1}{z(z-0.5)}$$

Giriş için casualitiden dolayı başlangıç koşulları sıfırdır :

$$f[-1]=f[-2]=\cdots=f[-n]=0$$

Buna göre giriş işareti aşağıdaki gibi olacaktır.

$$f[k-r]u[k]\Leftrightarrow \frac{1}{z^r}\;F[z]$$

Bundan sonra artık fark denkleminin z-dönüşümü yazılır.

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=3f[k-1]+5f[k-2]$$

$$f[k-1]u[k]=\frac{1}{z-0.5}\qquad ,\; f[k-2]\;u[k]=\frac{1}{z(z-0.5)}$$

$$Y[z]-5\left[\frac{1}{z}Y[z]+\frac{11}{6}\right]+6\left[\frac{1}{z^2}Y[z]+\frac{11}{6z}+\frac{37}{36}\right]=\frac{3}{z-0.5}+\frac{5}{z(z-0.5)}$$

veya,

$$\left(1-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}\right)Y[z]-\left(3-\frac{11}{z}\right)=\frac{3}{z-0.5}+\frac{5}{z(z-0.5)}$$

$$\left(1-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}\right)Y[z]=\left(3-\frac{11}{z}\right)+\frac{3z+5}{z(z-0.5)}$$

$$=\frac{3z^2-9.5z+10.5}{z(z-0.5)}$$

Her iki taraf z^2 ile çarpılırsa

$$(z^2 - 5z + 6)Y[z] = \frac{z(3z^2 - 9.5z + 10.5)}{(z - 0.5)}$$

$$Y[z] = \frac{z(3z^2 - 9.5z + 10.5)}{(z - 0.5)(z^2 - 5z + 6)}$$

$$\frac{Y[z]}{z} = \frac{(3z^2 - 9.5z + 10.5)}{(z - 0.5)(z^2 - 5z + 6)} = \frac{(26/15)}{z - 0.5} - \frac{(7/3)}{z - 2} + \frac{(18/5)}{z - 3}$$

$$Y[z] = \frac{26}{15}\left(\frac{z}{z - 0.5}\right) - \frac{7}{3}\left(\frac{z}{z - 2}\right) + \frac{18}{5}\left(\frac{z}{z - 3}\right)$$

Buradan $Y[z]$ çıkışının invers Z transformasyonu alınırsa,

$$\mathrm{Z}^{-1}\{Y[z]\} = \mathrm{Z}^{-1}\{\frac{26}{15}\left(\frac{z}{z - 0.5}\right) - \frac{7}{3}\left(\frac{z}{z - 2}\right) + \frac{18}{5}\left(\frac{z}{z - 3}\right)\}$$

$$y[k] = \left[\frac{26}{15}(0.5)^k - \frac{7}{3}(2)^k + \frac{18}{5}(3)^k\right]u[k]$$

Örnek

Şimdi ayrık durumdaki sistem için Z transformasyonunu göz önüne alarak sistem çıkışının $y_{zi}[k]$ ve $y_{zs}[k]$ bileşenleri cinsinden ifadesini incelemeye çalışacağız. Az önce yUkarıda çözülen örneği düşünürsek,

$$\left(1 - \frac{5}{z} + \frac{6}{z^2}\right)Y[z] \quad - \quad \underbrace{\left(3 - \frac{11}{z}\right)}_{\text{baslangic kosullari terimi}} = \underbrace{\frac{3}{z - 0.5} + \frac{5}{z(z - 0.5)}}_{\text{giris terimi}}$$

$$\left(1 - \frac{5}{z} + \frac{6}{z^2}\right)Y[z] = \underbrace{\left(3 - \frac{11}{z}\right)}_{\text{baslangic kosullari terimi}} + \underbrace{\frac{(3z + 5)}{z(z - 0.5)}}_{\text{giris terimi}}$$

Her iki taraf z^2 ile çarpılırsa

$$(z^2 - 5z + 6)Y[z] = \underbrace{z(3z - 11)}_{\text{baslangic kosullari terimi}} + \underbrace{\frac{z(3z + 5)}{z - 0.5}}_{\text{giris terimi}}$$

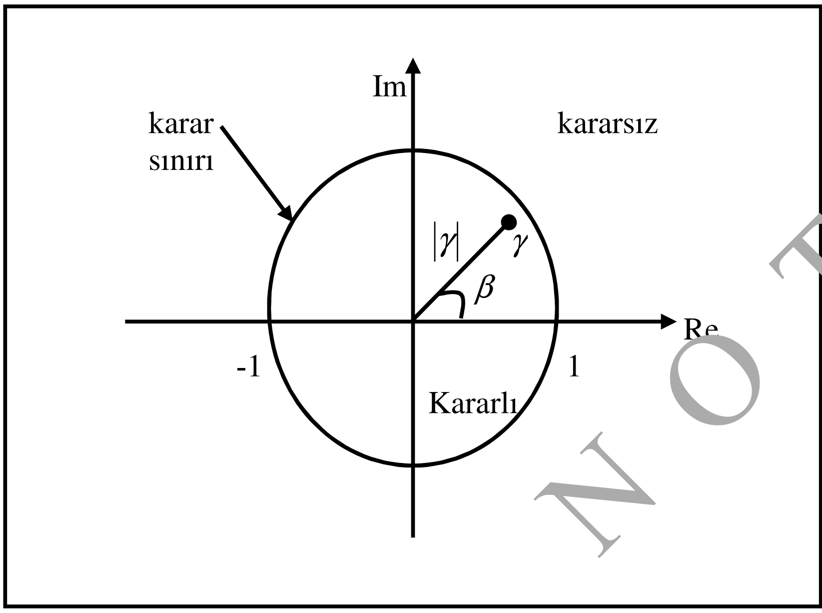
$$Y[z] = \underbrace{\frac{z(3z - 11)}{z^2 - 5z + 6}}_{\text{sifir-giris cevabi}} + \underbrace{\frac{z(3z + 5)}{(z - 0.5)(z^2 - 5z + 6)}}_{\text{sifir-durum cevabi}}$$

$$Y[z] = \underbrace{\left[5\left(\frac{z}{z - 2}\right) - 2\left(\frac{z}{z - 3}\right)\right]}_{\text{sifir- giris}} + \underbrace{\left[\frac{26}{15}\left(\frac{z}{z - 0.5}\right) - \frac{22}{3}\left(\frac{z}{z - 2}\right) + \frac{28}{5}\left(\frac{z}{z - 3}\right)\right]}_{\text{sifir- durum}}$$

$$y[k]=\left[\underbrace{5\,(2)^k-2\,(3)^k}_{\text{sifir - giris}}\underbrace{-\frac{22}{3}(2)^k+\frac{28}{5}(3)^k+\frac{26}{15}(0.5)^k}_{\text{sifir - durum}}\right]u[k]$$

$$y[k]=[-\frac{7}{3}(2)^k+\frac{18}{5}(3)^k+\frac{26}{15}(0.5)^k\,]\,u[k]$$

Ayrık Sistemlerde Kararlılık



Şekil 15.Karekterisitk kökler ve kararlılık

Buna gore sistemin stabilitesi üç duruma gore belirlenir.

1. Sürekli bir LTID sistemin asimtotik olarak kararlı olabilmesi için sistem transfer fonksiyonunun "kutupları (poles)" kompleks frekans düzleminin yer aldığı birim çemberin içinde olması gerekiyor. Kutuplar basit veya kök katları (tekrarlayan) tipte olabilirler.

2. Sürekli bir LTID sistem kararsız ise, iki koşuldan birinin var olması gerekir :

a) Transfer fonksiyonunun en az bir kutbu birim çemberin dışında
b) Transfer fonksiyonunun birim çemberin üzerinde katlı kutupları olması gerekir.

3. Eğer sürekli LTID sistemin transfer fonksiyonunun kutupları birim daire içinde değilse, ama birim çember üzerinde katlı olmayan kutuplar varsa, *zorunlu (marginally) kararlılık* durumu söz konusu olacaktır.

$\sigma \rightarrow -\infty$ için $r=0$ minimum
$\sigma \rightarrow 0$ için $r=1$ maximum — **Çemberin içi, kararlı bölge**
$\sigma=[0,\infty]$ **Çemberin dışı, kararsız bölge**

Örnek

Sistem transfer fonksiyonu

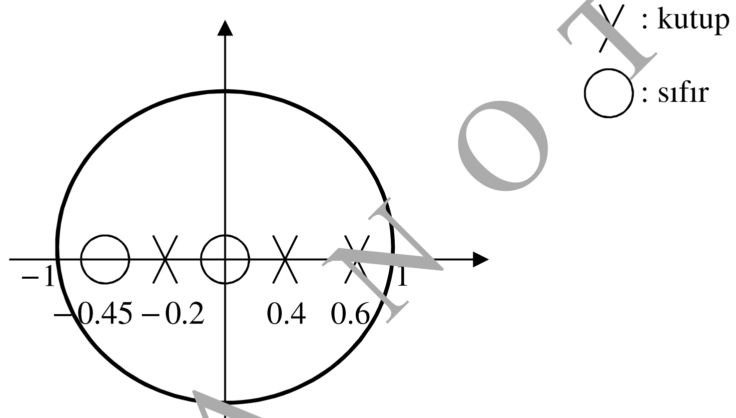
$H[z]=\dfrac{Y[z]}{F[z]}=\dfrac{z(z+0.45)}{(z^2-0.2z-0.08)(z-0.6)}$ olan ayrık sistemin kararlılığını inceleyin.

Çözüm

$$H[z]=\frac{Y[z]}{F[z]}=\frac{z(z+0.45)}{(z^2-0.2z-0.08)(z-0.6)}=\frac{z(z+0.45)}{(z+0.2)(z-0.4)(z-0.6)}$$

$$H[z]=\frac{z(z+0.45)}{(z+0.2)(z-0.4)(z-0.6)}$$

Ayrık sistemin kutupları, $z=-0.2$, $z=0.4$ ve $z=0.6$ olarak $(-1,1)$ birim çemberin içinde yer aldıklarından, ayrık sistem kararlıdır. Sistemin sıfırları ise $z=0$ ve $z=-0.45$



Şekil 16.Kararlı ayrık sistem

Bilinear Transformasyon

Laplace ve Z Transformasyonları arasında dönüşüm **<u>Tustin metodu</u>** olarak anılan yaklaşımla sağlanmaktadır. Bu yaklaşım aynı zamanda **bilineer transformasyon** olarak da anılmaktadır.

$z=e^{sT}$ veya $s=\dfrac{1}{T}\ln z$

$$z=e^{sT}=\frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}}\approx\frac{1+sT/2}{1-sT/2}$$

Invers Tustin bağıntısı olarak $s=\dfrac{1}{T}\ln z$ göz önüne alınırsa,

$$s\approx\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Bilinear Transformasyon (Tustin Transformasyonu)

$$z\approx\frac{2+sT}{2-sT}$$

Her iki bağıntıda, örtüşme sorununun olmadığı kabulü ve uzayların özelliklerinin korunduğu (**konformal tasfir**) prensibi göz önüne alınmıştır.

AYRIK-ZAMANLI SISTEMLERIN DURUM-UZAY ANALIZLERI

Daha önce sürekli – zaman sistemleri için ele alınan Durum – Uzay Modeli (state – space model) bu kez ayrık sistemler için ele alınacaktır. Hatırlanacağı gibi daha once,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

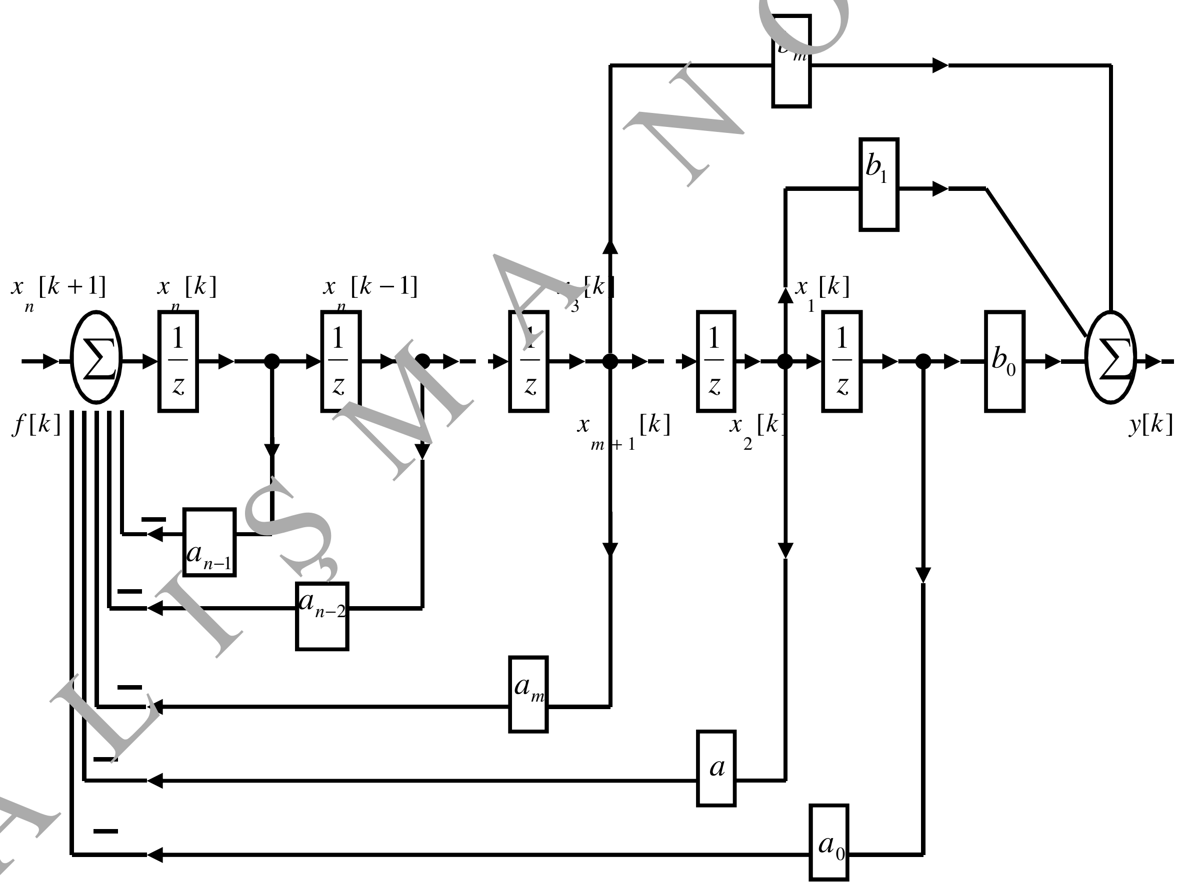
veya

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t)$$

biçiminde "*n*" nci dereceden süreki bir sistemi göstermede kullanılan diferansiyel denklem gösterimini, bu kez ayrık sistemlere uyarlayarak ayrık karşılığını bulmaya çalışacağız. Bunun için sürekli formdaki $f(t)$ ve $y(t)$ giriş ve çıkış işaretleri ayrık formdaki $f[k]$ ve $y[k]$ işaretleri olacaktır. Bu şekilde ayrık "n" ci dereceden bir sistemin fark denklemi

$$(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \cdots + a_1 E + a_0)\, y[k] = (b_m E^m + b_{m-1}E^{m-1} + \cdots + b_1 E + b_0)\, f[k]$$

gibi olacaktır. Böyle bir fark denklemin direct kanonik formda gösterimi aşağıda verilmiştir.



Şekil 17. "*n*" ci Dereceden ayrık-zaman sistemin kanonik formda realizasyonu

Şekildeki ayrık sistemin $f[k]$ ve $y[k]$ giriş-çıkış işaretlerini dikkate alan ayrık transfer fonksiyonu

$$H[z]=\frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

olacaktır. Bu sistemin girişi $f[k]$ ve çıkışı $y[k]$ olmak üzere fark denklemi

$$(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \cdots + a_1 E + a_0)\,y[k] = (b_m E^m + b_{m-1}E^{m-1} + \cdots + b_1 E + b_0)\,f[k]$$

$$E^n y[k] + a_{n-1}E^{n-1} y[k] + \cdots + a_1 E y[k] + a_0 y[k] = f[k]$$

gibi olan sistemin $x_1[k], x_2[k], \cdots, x_n[k]$ şeklindeki durum değişkenlerini elde etmeye çalışalım. İlk olarak sürekli sistemdeki diferansiyel denklemi göz önüne alan

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ x_3 &= \ddot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

yaklaşımını göz önüne alalım. Burada $x_1, x_2, \cdots, x_n$ durum değişkenleri diferansiyel denklemi oluşturan terimlere atanmıştır. Burada ayrık sistemdeki E sembölünün sürekli sistemdeki diferansiyel denklemdeki $\dfrac{d}{dt}$ ye

$$\frac{d}{dt} \equiv E$$

$$\dot{y} \equiv y[k+1]$$

işlem operatörü gibi karşılık geldiğini göz önünde tutarak bunun ayrık sistemdeki karşılığını oluşturabiliriz. Bunun için fark denklemleriyle alakalı olarak $y[k], y[k+1], y[k+2], \cdots, y[k+n-1]$ ayrık çıkışlarının $x_1[k], x_2[k], \cdots, x_n[k]$ ayrık durum değişkenleri türünden karşılığını aşağıdaki gibi yazmamız gerekir.

$$\begin{aligned} x_1[k] &= y[k] \\ x_2[k] &= y[k+1] \\ x_3[k] &= y[k+2] \\ &\vdots \\ x_n[k] &= y[k+n-1] \end{aligned}$$

$$x_n[k+1] = -a_{n-1}x_n[k] - a_{n-2}x_{n-2}[k] - \cdots - a_3 x_4[k] - a_2 x_3[k] - a_1 x_2[k] - a_0 x_1[k] + f[k]$$
$$y[k] = b_0 x_1[k] + b_1 x_2[k] + \cdots + b_{m-1} x_{m+1}[k]$$

durum denklemi olarak göz önüne alan sistemin matrisyel formdaki durum-uzay tanımı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \cdots \\ x_{n-1}[k+1] \\ x_n[k+1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \cdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} f[k]$$

$$\underbrace{\mathbf{y}[k] = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{m+1}[k] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}[k]}$$

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\,\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\,\mathbf{f}[k]$$
$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\,\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\,\mathbf{f}[k]$$

Ayrık durum-uzay denklemlerini sağlamaktadır. Eğer ilgili **A**, **B**, **C** ve **D** katsayıları zamana bağımlı $\mathbf{A}[k], \mathbf{B}[k], \mathbf{C}[k]$ ve $\mathbf{D}[k]$ gibi değişseydi denklemler

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}[k]\,\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}[k]\,\mathbf{f}[k]$$
$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}[k]\,\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}[k]\,\mathbf{f}[k]$$

Ayrik-Zamanli Sistemlerin Durum-Uzay Çözümleri

Durum çözümü

$$\mathbf{x}[k] = \underbrace{\mathbf{A}^k\ \mathbf{x}[0]}_{\text{sifir giris}} + \underbrace{\mathbf{A}^{k-1}u[k-1] * \mathbf{B}\mathbf{f}[k]}_{\text{sifir durum}}$$

Çıkış çözümü

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\,\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\,\mathbf{f}[k]$$

Denklemindeki parametreler dikkate alınır. Bunun için yukarıda bulunan $\mathbf{x}[k]$ durum vektörü

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k\ \mathbf{x}[0] + \mathbf{A}^{k-1}u[k-1] * \mathbf{B}\mathbf{f}[k]$$

$\mathbf{y}[k]$ de yerine yazılırsa

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\ \mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\,\mathbf{f}[j] + \mathbf{D}\,\mathbf{f}$$
$$= \mathbf{C}\mathbf{A}^k\ \mathbf{x}[0] + \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}u[k-1] * \mathbf{B}\,\mathbf{f}[k] + \mathbf{D}\,\mathbf{f}$$

$$\mathbf{A}^k = \beta_0\mathbf{I} + \beta_1\mathbf{A} + \beta_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$$

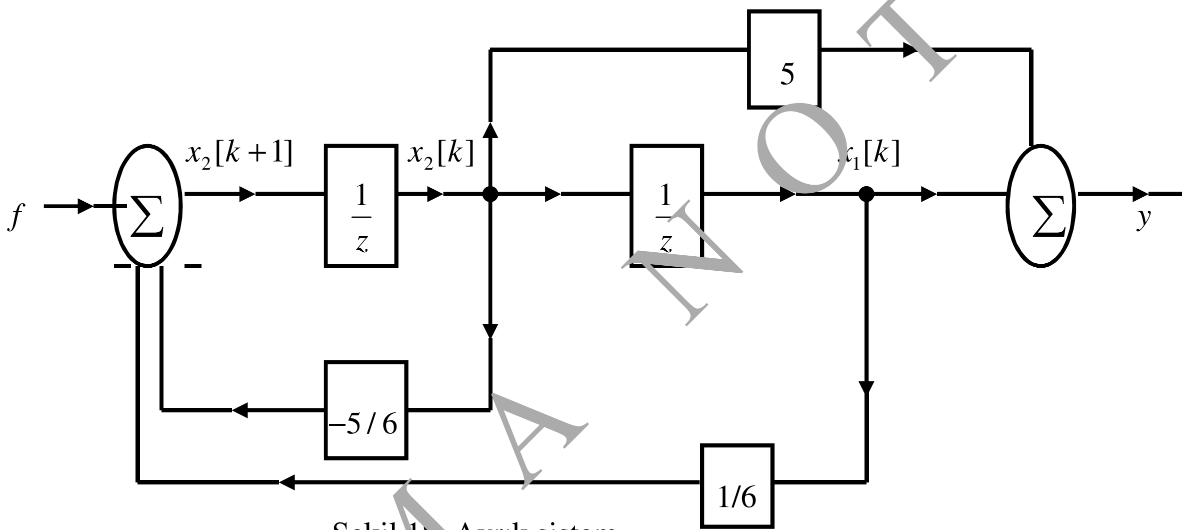
$$\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \cdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1^k\\ \lambda_2^k\\ \cdots\\ \lambda_n^k\end{bmatrix}$$

Denklemdeki $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ $\mathbf{A}$ matrisinin öz değerleridir. Bununla birlikte $\mathbf{A}^k$ istenirse Z transformasyonundan da elde edilebilir ;

$\mathbf{A}^k = Z^{-1}[(\mathbf{I}-z^{-1}\mathbf{A})^{-1}]$ **Ayrık zaman durum geçiş matrisi**

Örnek

Aşağıdaki şekle göre ayrık sistemin durum-uzay modelini elde edin.



Şekil 18. Ayrık sistem

Çözüm

Şekilden integrator (1/z) çıkışları göz önüne alınarak durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x_1[k+1]=x_2[k]$$
$$x_2[k+1]=-\frac{1}{6}x_1[k]-\left(-\frac{5}{6}\right)x_2[k]+f=-\frac{1}{6}x_1[k]+\frac{5}{6}x_2[k]+f$$
$$y[k]=x_1[k]+5x_2[k]$$

Bu yazıma uygun Ayrık Zaman – Durum Uzay modeli aşağıdaki gibi oluşturulabilir..

$$\begin{bmatrix}x_1[k+1]\\ x_2[k+1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1/6 & 5/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1[k]\\ x_2[k]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f$$
$$y[k]=\begin{bmatrix}-1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1[k]\\ x_2[k]\end{bmatrix}$$

Ayrık Durum-Uzay Denklemlerinin Z Transformasyonuyla Çözümü

$$\mathbf{X}[z] = \underbrace{Z^{-1}\,[(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}\, z\, \mathbf{x}[0]]}_{\text{sifir giris bileseni}} + \underbrace{Z^{-1}\,[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{B}\, \mathbf{F}[z]]}_{\text{sifir durum bileseni}}$$

Hatırlabacağı gibi daha önceden

$\mathbf{A}^{k} = Z^{-1}[(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}]$ **Ayrık zaman durum geçiş matrisi**

olarak verilmişti. Şimdi buradan yine Z transformasyonuyla çıkışa yani cevaba yönelik çözümü araştıralım.

Çıkışın hesabı :

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\,\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\,\mathbf{f}[k]$$

$$\mathbf{Y}[z] = \mathbf{C}\,\mathbf{X}[z] + \mathbf{D}\,\mathbf{F}[z]$$

$$\mathbf{X}[z] = (\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}\, z\, \mathbf{x}[0] + ((z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{F}[z]$$

Bunu çıkıştaki yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}[z] &= \mathbf{C}\,[(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}\, z\, \mathbf{x}[0] + ((z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{F}[z]] + \mathbf{D}\,\mathbf{F}[z] \\ &= \mathbf{C}\,(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{x}[0] + [\mathbf{C}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\,\mathbf{F}[z] \\ &= \underbrace{\mathbf{C}\,(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{x}[0]}_{\text{sifir giris cevabi}} + \underbrace{\mathbf{H}[z]\,\mathbf{F}[z]}_{\text{sifir durum cevabi}}\end{aligned}$$

Transfer Fonksiyonunun Hesabı

$$\mathbf{H}[z] = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\,\mathbf{F}(z)$$

$$\mathbf{h}[k] = Z^{-1}\,\{\mathbf{H}(z)\}$$

Ayrık – Zaman Durum uzay Modelinin Sürekli – Zaman Durum Uzay Modelinden Elde Edilmesi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Bu şekilde sürekli zamanda verilen klasik Durum – Uzay Modelini Ayrık – Zaman Durum Uzay Modeline dönüştürmek istiyorsak, örneklememiz gerekiyor. Bunun için T örnekleme periyodunun bilinmesi gerekiyor. Buna göre, aşağıdaki ayrık model elde edilir.

$$\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{B}}u(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

$$\hat{\mathbf{A}} = L^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}_{t=T} \quad , \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}(\hat{\mathbf{A}}-\mathbf{I})\mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{C}=\mathbf{C} \quad , \quad \mathbf{D}=\mathbf{D}$$

Örnek

Sürekli – Zaman Durum – Uzay Modeli $\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$, $y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$ olarak verilen sürekli sistemin $T = 1\,\text{sn}$ ile örnekleyen Ayrık – Zaman Durum Uzay Modelini elde edin.

Çözüm

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix} \ , \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}0 \ , \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \ , \ \mathbf{D} = 0 \ , \quad \begin{matrix}\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{B}}u(k)\\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{matrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = L^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}_{t=T} = L^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}_{t=1}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s-1 & 0-1\\ 0-0 & s-(-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s-1 & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1/(s-1) & 1/(s-1)(s+2))\\ 0 & 1/(s+2)\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} = \frac{As+2A+Bs-B}{(s-1)(s+2)} = \frac{(A+B)s+2A-B}{(s-1)(s+2)}$$

$$1 = (A+B)s + 2A - B$$
$$0 = A + B$$
$$1 = 2A - B \rightarrow A = 1/3 \ , \ B = -1/3$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1/3}{s-1} + \frac{-1/3}{s+2}$$

$$\frac{1}{3}[e^{t}u(t) - e^{-2t}u(t)] \leftrightarrow \frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1/3}{s-1} - \frac{1/3}{s+2}$$

$$e^{t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-1} \ , \ e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}$$

$$L^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}1/(s-1) & 1/(s-1)(s+2))\\ 0 & 1/(s+2)\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}e^{t}u(t) & (1/3)[e^{t}u(t) - e^{-2t}u(t)]\\ 0 & e^{-2t}u(t)\end{bmatrix}$$

$t = T = 1$ sn örnekleme periyodu uygulanırsa,

$$\hat{\mathbf{A}} = L^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}_{t=T=1} = \begin{bmatrix} e^{1}u(1) & (1/3)[e^{1}u(1)-e^{-2.(1)}u(1)] \\ 0 & e^{-2.(1)}u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.73 & 0.865 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.317 \\ 0 & 0.134 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}(\hat{\mathbf{A}}-\mathbf{I})\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0.317 \\ 0 & 0.134 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1-1 & 0.317-0 \\ 0-0 & 0.134-0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0.317 \\ 0 & 0.134 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3840 \\ -0.0670 \end{bmatrix}$$

$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.317 \\ 0 & 0.134 \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0.3840 \\ -0.0670 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = 0$, $T = 1$ sn örnekleme periyodu için,

$$\begin{matrix} \mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{B}}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.317 \\ 0 & 0.134 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3840 \\ -0.0670 \end{bmatrix}u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ayrık – Zaman Durum – Uzay Modellerinin Kontroledilebilirliği ve Gözlemlenebilirliği

Örnek

Transfer fonksiyonu $H(z) = \dfrac{0.5z+1}{z^2+1.5z+0.54} = \dfrac{0.5z+1}{(z+0.6)(z+0.9)}$ olarak verilen ayrık – zaman sistemin Durum – Uzay Modelini oluşturarak, kontroledilebilirliğini, gözlemlenebilirliğini ve model üzerinden kararlılığını araştırın.

Çözüm

Transfer fonksiyonu ile durum – uzay modelin elde edilişi ; Direkt/kıntroledilebilir form

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{0.5z+1}{z^2+1.5+0.54} = \frac{Y(z)}{X(z)}\frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1}{z^2+1.5z+0.54}(0.5z+1)$$

$$\frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1}{z^2+1.5z+0.54} \rightarrow (z^2+1.5z+0.54)X(z) = F(z)$$

$$z^2X(z)+1.5zX(z)+0.54X(z) = F(z) \rightarrow f = x_2[k+1]+x_2[k]+0.16x_1[k] \rightarrow x_2[k+1] = -0.54x_1[k]-1.5x_2[k]$$

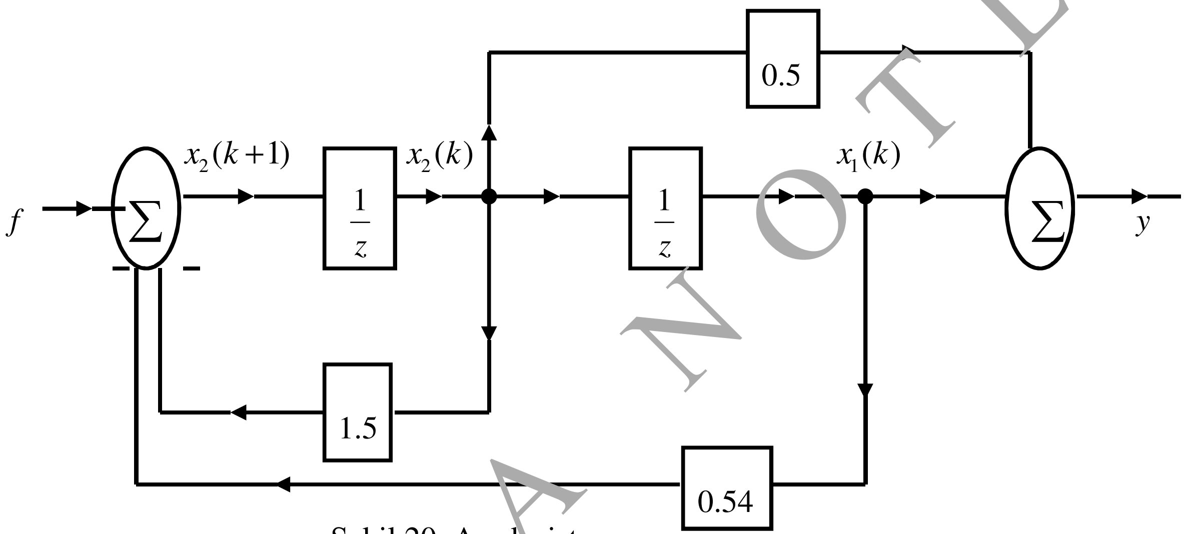
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 0.5z+1 \rightarrow (0.5z+1)X(z) = Y(z)$$

$$0.5zX(z)+X(z) = Y(z) \rightarrow y[k] = 0.5x_2[k]+x_1[k]$$

$$x(k) = x_1(k) = X(z)$$
$$x_2(k) = x_1(k+1) = zX(z)$$
$$x_2(k+1) = z^2 X(z)$$

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -0.54x_1(k) - 1.5x_2(k) \\ y(k) &= x_1(k) + 0.5x_2(k) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.54 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ayrık karşılığı elde edilen Durum – Uzay modelinin basit formu olarak alınan kontroledilebilir kanonik formu aşağıdaki gibi oluşturulur.



Şekil 20. Ayrık sistem

Çözüm

Şekil göz önüne alındığında aşağıdaki denklemler oluşturulacaktır.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.54 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f[k]$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.54 & -1.5 \end{bmatrix} \;,\; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 0 \;,\; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} \;,\; \mathbf{D} = 0$$

a) Kontroledilebilirlik

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.54 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 + 1.1 \\ -0.54.0 + (-1.5).1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$\varsigma = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\varsigma) = (-1.5).0 - 1.1 = -1$$

$\det(\varsigma) \neq 0$ olduğundan $\text{rank}(\varsigma) =$ Durum değişkeni sayısı

Rank bilgisine göre ayrık sistem kontroledilebilirdir.

b) Gözlemlenebilirlik

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.54 & -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 + (0.5).(-0.54) & 1.1 + (0.5).(-1.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.27 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ -0.27 & 0.25 \end{bmatrix} \rightarrow \det(O) = 1.(0.25) - (0.5).(-0.27) = 0.25 + 0.135 = 0.385$$

$\det(O) \neq 0 \rightarrow \text{rank}(O) = 2 =$ Durum (state) sayısı

Rank bilgisine göre ayrık sistem gözlenebilirdir.

c) Kararlılık

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.54 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Eğer **A** Durum matrisinin öz değerleri birim çemberin içinde yer alıyorsa ayrık sistem kararlı olacaktır.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.54 & -1.5 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.54 & -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 0 & 0 - 1 \\ 0 - (-0.54) & \lambda - (-1.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0.54 & \lambda + 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0.54 & \lambda + 1.5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1.5) - \left[-1.(0.54\right] = \lambda^2 + 1.5\lambda - \left[-0.54\right] = \lambda^2 + 1.5\lambda + 0.54$$

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \rightarrow \lambda^2 + 1.5\lambda + 0.54 = 0 = (\lambda + 0.6)(\lambda + 0.9) \rightarrow \lambda = -0.6 \text{ ve } \lambda = -0.9$$

Sistemin öz değerleri $\lambda = -0.6$ ve $\lambda = -0.9$ olarak birim çember içinde yer aldığından ayrık sistem kararlıdır.