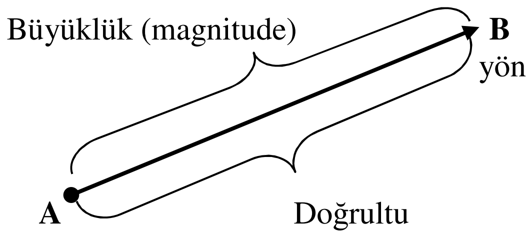
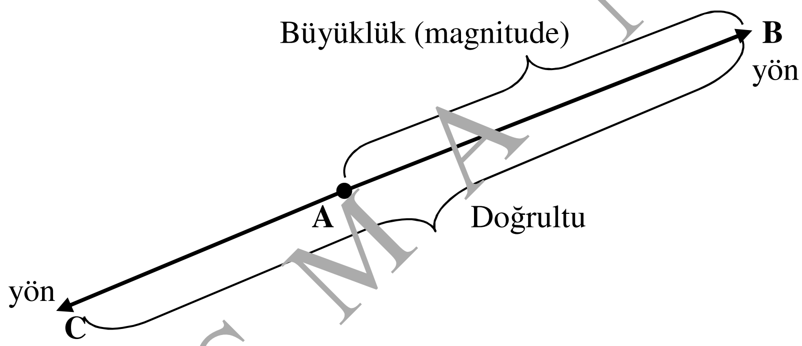
VEKTÖRLER

Vektörler belirli yön, doğrultu ve büyüklükteki (uzunluk) doğru parçalarıdır. Yönlendirilmiş doğru parçaları yanlış değil, ancak eksik bir tanımlamadır. Doğrultu ve yön kavramlarından dolayı vektörler belirli koordinatlara sahiptirler.



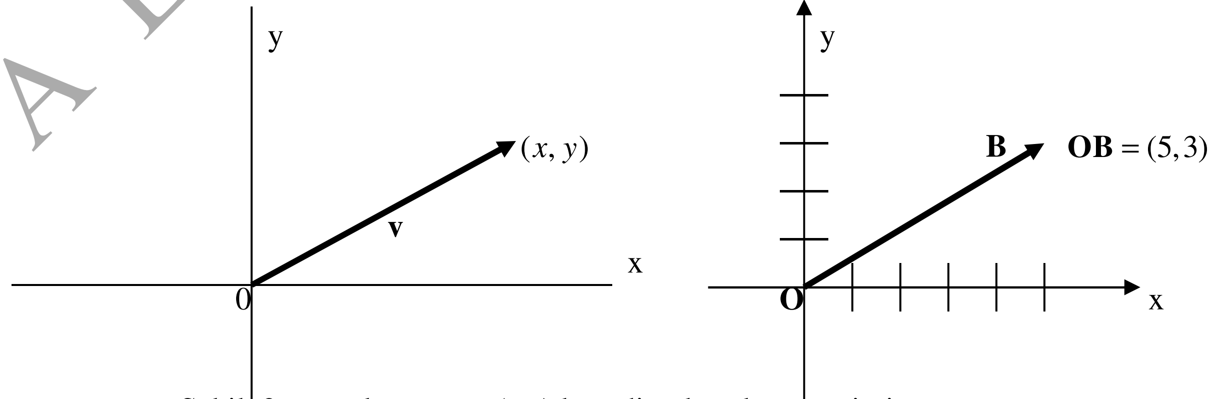
Şekil 1. Vektör gösterimi

Şekilde gösterilen vektörde **A** ucu (noktası) başlangıç, **B** ise bitiş ucudur. Bu anlamda vektörler belirli yön, doğrultu ve büyüklükte ve aynı zamanda başlangıç-bitiş noktaları (koordinatları) olan doğru parçalarıdır. Vektörel gösterimde yön ve doğrultu karıştırılabilen bir kavram olmakla beraber, gerçekte farklıdırlar. Yukarıdaki şekilden görüldüğü gibi, vektör **AB** doğrultusunda ve belirtilen yöndedir. Oysa ki, aşağıdaki gösterim dikkate alındığında,



Şekil 2. Vektör gösterimi

CB doğrultusunda farklı yönlerde iki vektör olduğu dikkati çekmektedir. Bu nedenle vektör gösteriminde doğrultu ve yön önemli ve farklı kavramlardır. Kartezyan koordinatlarda bir vektörün $\mathbf{v} = (x, y)$ genel ve **OB** örnek gösterimleri aşağıdaki şekillerde yapılabilir.



Şekil 2. **v** vektörünün (*x*,*y*) koordinatlarıyla gösterimi

Vektörlerin Matrisyel Gösterimi

Örneğin (x_1, x_2) koordinatlarından oluşan iki boyutlu bir nokta **x** vektörü ile klasik

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ biçiminde veya $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

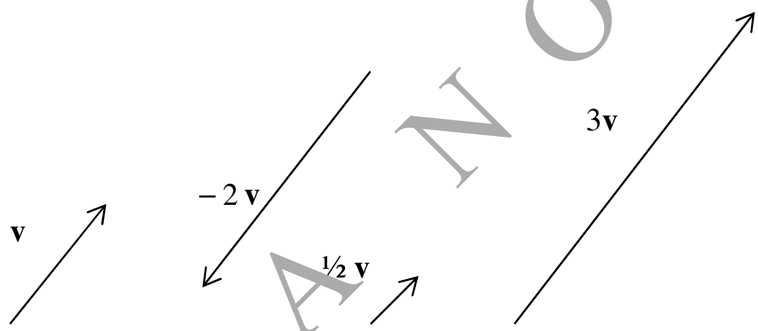
gibi sütun matrisi formunda gösterilebilir, diğer bir deyişle

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vektörlerin skalerle çarpımı

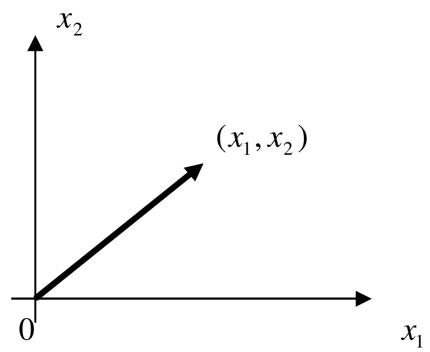
Eğer vektörümüz $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ise, bir " c " sabiti (skaler) ile çarpımı,

$$c\,\mathbf{v} = c\,(v_1, v_2, v_3) = (cv_1, cv_2, cv_3)$$



Şekil 3. Vektörlerin skalerlerle çarpımı

Norm : Vektör uzunluğu



Şekil 4. Gerçek vektörlerin R^2 deki uzunluğu

Burada x_1 ve x_2 R^2 de yani iki boyutlu gerçek sayılar için tanımlıdırlar. Şekilden görüldüğü gibi x_1 ve x_2 vektörlerinden oluşan R^2 deki **x** vektörünün uzunluğu **norm** olarak anılır ve $\|\mathbf{x}\|$ ile gösterilir. Buna göre $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$ olarak verilen x in uzunluğu :

$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\mathbf{x}|$

Norm görüldüğü kadarıyla bir vektörün büyüklüğünü gösteren kavramdır. Bu anlamda bir vektörün büyüklüğünü gösteren bu kavramın, işaret analizde işaretin enerjine karşılık gelmektedir.

Gerçek vektörlerin içsel çarpımı (skaler çarpım)

Skaler çarpım olarak anılan bu işlemde eğer iki gerçek vektör, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ iseler, $x, y \in R^n$ olmak üzere bunların içsel çarpımları $x \cdot y$,

$$x \cdot y = < x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Buna göre , $x.x = x^2$

$x.x = x^2 = \|x\|^2$

Kompleks Değerli Hilbert Space'in (Inner product Space) Özellikleri

Şimdi vektörleri daha genel olacak şekilde kompleks değerlikli Hilbert vektör uzayında kompleks vektörlerin içsel çarpımını yani skaler çarpımını ele alacağız. **x** ve **y** vektörleri kompleks olduklarından,

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $x, y \in C^n$ olmak üzere,

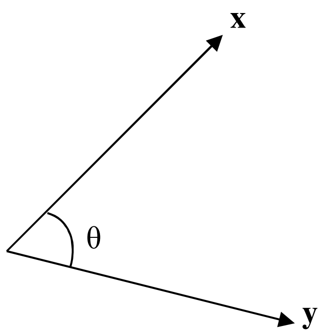
$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}$

Bu nedenle

$\mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{y}} \neq \mathbf{y} \cdot \overline{\mathbf{x}}$

olduğundan, gerçek sayılardaki R^n, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ ifadesi ile karıştırılmamalıdır.

İki Vektör Arasındaki Açı



Şekil 5. **x** ve **y** vektörleri

$$\mathbf{x.y} = <\mathbf{x},\mathbf{y}> = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}| \cos\theta$$

vektör uzunluklarını norm olarak da ifade edebiliriz.

$$\mathbf{x.y} = <\mathbf{x},\mathbf{y}> = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|}$$

Görüldüğü gibi, iki vektörün içsel çarpımları bir sayı olup vektör değildir. Buradan eğer iki vektör x ve x ise, içsel çarpımları,

$$x \cdot x = \|x\|^2$$

biçiminde vektörün uzunluğunu gösteren norm olarak hesaplanabilir. İçsel çarpımın diğer bir faydası da seçilen vektörlerin *ortogonal* olmalarıyla ilgilidir. İki vektör birbirlerine dik iseler (aralarındaki açının cos'u 90^0)

$$x \cdot y = |x||y| \cos 90$$

$$x \cdot y = y \cdot x = 0$$

Bu yaklaşım vektörlerin birbirlerine benzerliklerini inceleme açısından önemlidir.

Ortogonal Vektörler

$$\cos\theta = \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|}$$

$$\cos\theta = 0 \quad \text{veya} \quad \theta = 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

Bu durumdaki $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin ortogonal olduğu kabul edilir. Verilen bağıntıdan yararlanarak alternatif olarak ortogonallik koşulunun $\theta = 90^0$ yanısıra

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}> = 0$$

Sonuç 1 : Vektörler ortogonal iseler aralarındaki açı $\theta = 90^0$ ve içsel çarpımları sıfır ($<\mathbf{x},\mathbf{y}> = \mathbf{x.y} = 0$) olmalıdır.

Ortonormal Vektörler

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri ortogonal, birbirlerine dik, aralarındaki açı $\theta = 90^0$, ve de içsel çarpımları $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 0$ ve uzunlukları "1" ise $\|\mathbf{x}\| = 1$ ve $\|\mathbf{y}\| = 1$ vektörler ortonormal olarak anılırlar.

Örnek

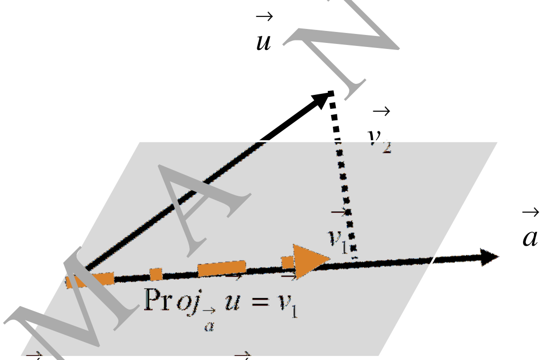
$\mathbf{x} = (9,-2) \quad , \quad \mathbf{y} = (4,18) \quad , \quad \text{ise} \quad \theta = ?$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{9^2 + (-2)^2} = \sqrt{85}$$
$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{4^2 + 18^2} = \sqrt{340}$$

$$\mathbf{x.y} = <\mathbf{x},\mathbf{y}> = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} = \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|}\frac{(9.4+(-2)18)}{\sqrt{85}\sqrt{340}} = \frac{0}{\sqrt{85.340}} = 0$$
$$\cos\theta = 0$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

Bu durumda **x** ve **y** vektörleri ortogonaldir.

Orthogonal projeksiyon (grafik yaklaşım)



Şekil 6. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{a}$ üzerine projeksiyonu

$$\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{u} \cong c\,\vec{a}$$
$$\vec{v}_1 = c\,\vec{a}$$

$$\vec{u} = c\,\vec{a} + \vec{v}_2$$

her iki tarafı $\vec{a}$ ile çarparsak,

$$\vec{u}.\vec{a} = (c\,\vec{a} + \vec{v}_2).\vec{a} = c\,\vec{a}.\vec{a} + \underbrace{\vec{v}_2.\vec{a}}_{0}$$

$$= c\,\vec{a}.\vec{a}$$

$$c = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{a}}{\vec{a}\,.\,\vec{a}} = \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}}{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}} = \frac{<\mathbf{u},\mathbf{a}>}{<\mathbf{a},\mathbf{a}>}$$

$$= \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

Bu durumda aranan projeksiyon,

$$\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\,\vec{u} = \vec{v}_1 = \mathrm{Proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 = c\ \mathbf{a}$$

$$= \frac{\mathbf{u}\ .\ \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a} = \frac{<\mathbf{u},\mathbf{a}>}{<\mathbf{a},\mathbf{a}>}\ \mathbf{a} = \frac{<\mathbf{u},\mathbf{a}>}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a}$$

Örnek

$\mathbf{u} = (-3,1)$, $\mathbf{a} = (7,2)$ ise, $\mathrm{Proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = ?$

$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a} = (-3.7 + 1.2) = -19$

$\|\mathbf{a}\|^2 = (\sqrt{7^2 + 2^2}\,)^2 = 53$

$$\mathbf{v}_1 = \mathrm{Proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\ .\ \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a} = \frac{-19}{53}\ (7,2) = \left(-\frac{133}{53}, -\frac{38}{53}\right)$$

Örnek

$\mathbf{A} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal özelliğini araştırın.

Çözüm

Öncelikle verilen matrisin $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ vektörlerini yazalım.

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Şimdi bu vektörlerin ortogonalliklerini test edelim.

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}(3.2 + 2.(-3)) = 0$$

Vektörlerin ortogonal oldukları görülmektedir. Ancak bunun **A** matrisinin de ortogonal olacağı anlamına gelemeyeceğini bir önceki örnekten biliyoruz. Bunun için verilen vektörlerin bu kez ortonormalliğini test edelim. Eğer vektörler ortogonal ve uzunlukları “ 1 “ ise, vektörler ortonormal olacaklardır. Bunun için sırasıyla iki vektörün uzunluklarını hesaplayalım.

$$\|\mathbf{A}_1\| = \sqrt{(\frac{3}{\sqrt{13}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{13}})^2} = \sqrt{\frac{9}{13} + \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1$$

$$\|\mathbf{A}_2\| = \sqrt{(\frac{2}{\sqrt{13}})^2 + (\frac{-3}{\sqrt{13}})^2} = \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1$$

Buradan her iki vektörün uzunluklarının da " 1 " olduğunu , $\|\mathbf{A}_1\| = \|\mathbf{A}_2\| = 1$ olduğu görülmektedir. Vektörler hem ortogonal ($\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = 0$), hem de birim uzunlukta olduklarından, sonuçta vektörler ortonormaldirler.

ÖZDEĞER – ÖZVEKTÖR (eigenvalue – eigenvector)

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

Örnek

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ Vektörünün $\mathbf{A\,x} = \lambda\,\mathbf{x}$ işlemi gereğince $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin öz vektörü olabileceğini gösterin.

Çözüm

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.(-7) + 7.4 \\ 4.(-7) + (-2).4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 + 28 \\ -28 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ -36 \end{bmatrix} = -9\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A\,x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

olduğundan, $\mathbf{x}$ vektörü $\mathbf{A}$ matrisinin öz vektörüdür.

Kare matrisin öz değerleri

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\lambda\,\mathbf{I}\,\mathbf{x} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} = 0$$

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0$$

$$\det(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 = |\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

$$|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{n}+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n = 0$$

Örnek

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$ Matrisinin öz değer ve öz vektörlerini hesaplayın.

Çözüm

$(\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$

İlk bölümde $(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ile elde edilen öz değerler ve öz vektörler şimdi $(\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=0$ kullanılarak teyit edilmeye çalışılacaktır.

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\lambda\,\mathbf{I}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$(\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=0$

$$\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda+8 & -4 \\ -5 & \lambda+9 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \lambda+8 & -4 \\ -5 & \lambda+9 \end{vmatrix}=(\lambda+8)(\lambda+9)-[-4.(-5)]=\lambda^2+17\lambda+72-[20]=\lambda^2+17\lambda+72-20$$

$|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ için

$\lambda^2+17\lambda+52=0 \;\rightarrow\; \lambda_1=-4$ **,** $\lambda_2=-13$

Öz değerler ayrı ve farklı elde edilmiştir. Bunların ardından, $\lambda_1=-4$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü hesaplayalım. Bunun için öz değeri $(\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ matrisinde yerine koyalım.

$$(\lambda_1\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\begin{bmatrix} \lambda_1+8 & -4 \\ -5 & \lambda_1+9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-13\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix} -4+8 & -4 \\ -5 & -4+9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -5x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \; x_1 = x_2 \; \rightarrow \; x_2 = a \rightarrow x_1 = a$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi $\lambda_2 = -13$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü hesaplayalım. Bunun için öz değeri $(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ matrisinde yerine koyalım.

$$(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_2 + 8 & -4 \\ -5 & \lambda_2 + 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-13\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -13+8 & -4 \\ -5 & -13+9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -5x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -5x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned} \;\rightarrow\; x_1 = -\frac{4x_2}{5} \;\rightarrow\; x_2 = 5a \rightarrow x_2 = -4a$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a \\ 5a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Buna göre verilen sistemin $\lambda_1 = -4$ ve $\lambda_2 = -13$ reel ve farklı öz değerlerine karşılık gelen öz vektörleri,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ Matrisinin öz değer ve öz vektörlerini hesaplayın.

Çözüm

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \lambda\,\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$$

$$\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 4 & -5 \\ 5 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -5 \\ 5 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-4)-[-5.5] = \lambda^2-16-[-25] = \lambda^2-16+25$$

$|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}| = 0$ için

$$\lambda^2+9=0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = j3 \;\;,\;\; \lambda_2 = -j3$$

Öz değerler tam kompleks olarak elde edilmiştir. İlk olarak $\lambda_1 = j3$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü hesaplayalım. Bunun için öz değeri $(\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ matrisinde yerine koyalım.

$$(\lambda_1\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1+4 & -5 \\ 5 & \lambda_1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(j3\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} j3+4 & -5 \\ 5 & j3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} (4+j3)x_1-5x_2=0 \\ 5x_1+(-4+j3)x_2=0 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{5x_2}{4+j3} \;\rightarrow\; x_2 = (4+j3)a \rightarrow x_1 = 5a$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a \\ (4+j3)a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 5 \\ 4+j3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4+j3 \end{bmatrix}$$

Şimdi $\lambda_2 = -j3$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü hesaplayalım. Sonuçta öz değerlerin kompleks ve eşlenik olması durumunda öz vektörlerde eşlenik olacağından,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a \\ (4-j3)a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 5 \\ 4-j3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4-j3 \end{bmatrix}$$

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini hesaplayın.

Çözüm

A matrisi 2 x 2 boyutlu olduğundan, üç öz değer ve bunlara karşılık gelen iki lineer bağımsız öz vektörün elde edilmesini bekliyoruz.

$$\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda).(2-\lambda) = (2-\lambda)^2$$

$$|\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}| = 0 \;\rightarrow\; (\lambda-2)^2 = 0 \;,\; \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Sistemin karakteristik denkleminden $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ olarak katlı öz değerlerin söz konusu olduğunu görmekteyiz Bu doğrultuda söz konusu katlı öz değere karşılık gelen öz vektörleri elde etmeye çalışalım. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ öz değeri için,

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 0.x_1 + 0.x_2 = 0 \\ 0.x_1 + 0.x_2 = 0 \end{matrix}$$

Son yazılan 2x2 lineer bağımsız denklem sisteminde katsayılar sıfır olduğundan x_1 ve x_2 ne alınırsa alınsın sonuç (sıfır) değişmeyecektir. Bu durumda x_1 ve x_2 keyfi seçilebilir. Birinci öz vektör için $x_1 = 1$ ve $x_2 = 0$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ikinci öz vektör için ise $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ olarak $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alınabilir. Buna göre $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ tipindeki diyagonal matrislerin öz vektörleri $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tipindeki **standart vektörlerdir**. Diğer bir deyişle $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$, **A** matrisinin öz vektörleridir.

Öz Değerlerin Lineer Sistem Davranışının Belirlenmesine Etkisi

Lineer sistemlerde $y(t)$ sistem çıkışı genellikle karekteristik mod olarak anılan $e^{\lambda_i t}$ tipli exponensiyellerin c_i katsayılarından içeren lineer kombinasyonlarından oluşmaktadır.

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$$

Bu gösterimdeki λ_i öz değerlerin, genel olarak $\lambda_i = a_i \mp j\omega_i$ yapısında olmasına göre öz değerler farklı tiplere ayrılırlar.

1 **Reel öz değerler :** $\lambda_i = a_i$ $\quad (\omega_i = 0$ için)
2.**Kompleks öz değerler** ($\lambda_i = a_i + j\omega_i$)
3. **Katlı öz değerler :** $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ $\quad (\omega_i = 0$ için)

Bu noktadan itibaren göz önüne alınacak örneklerde, öz değerlerin sistem etkisi de ayrıca değerlendirilecektir.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ Matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini hesaplayın.

Çözüm

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \lambda\,\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$$

$$\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 7 & 1 \\ -6 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 1 \\ -6 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)(\lambda - 2) - [-6.1] = \lambda^2 - 9\lambda + 14 + 6 = \lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \mathbf{,} \quad \lambda_2 = 5$$

Not : Lineer zamandan bağımsız (Linear Time Invariant, LTI system) sistem için iki öz değerin pozitif oluşu, sistemi kararsızlığa götürmektedir.

Bunların ardından, $\lambda_1 = 4$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü hesaplayalım. Bunun için öz değeri $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ matrisinde yerine koyalım.

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda - 7 & 1 \\ -6 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 - 7 & 1 \\ -6 & 4 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -3x_1 + x_2 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3} \rightarrow x_2 = 3a \text{ olsun}$$

$$x_1 = a$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 3a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Şimdi $\lambda_2 = 5$ öz değerine karşılık gelen ikinci öz vektörü hesaplayalım. Bunun için öz değeri $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_2 = 0$ matrisinde yerine koyalım.

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \lambda - 7 & 1 \\ -6 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}5-7 & 1\\ -6 & 5-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}-2x_1+x_2=0\\ -6x_1+3x_2=0\end{matrix}\quad\rightarrow\quad x_1=\frac{x_2}{2}\quad\rightarrow x_2=2a$$

$$x_1=a$$

$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ 2a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

Reel öz değerler ve sistem davranışı :

Lineer sistemin öz değerleri reel ise sistemin davranışı aşağıdaki çıkış denkleminden belirlenir.

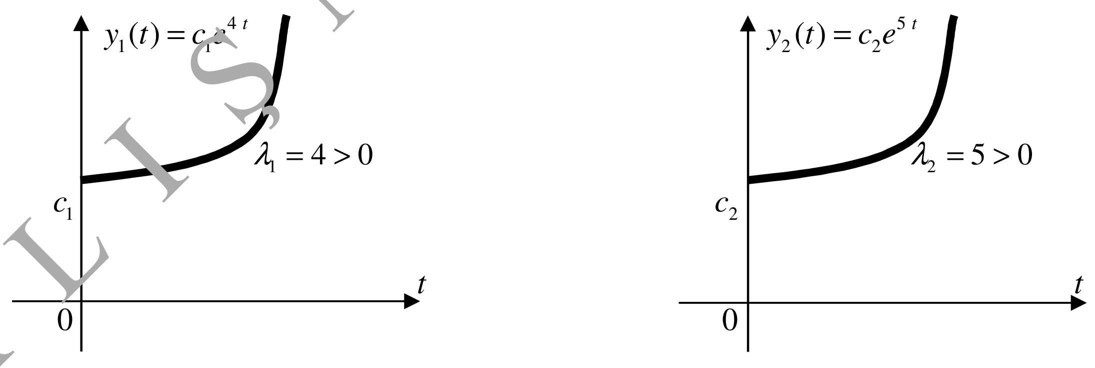
$$y(t)=c_1e^{\lambda_1\,t}+c_2e^{\lambda_2\,t}+c_3e^{\lambda_3\,t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n\,t}$$

Bu genel ifadenin ışığında örnekteki lineer sisteme ait öz değerleri ($\lambda_1=4$, $\lambda_2=5$), reel ve pozitif olduğundan, kararsız davranacaktır. Bu durumda sistemin çıkışının sonsuz uzun bir sürede sükûnete yani başlangıç koşullarına varamayacağı, sonsuza/belirsizliğe gideceği düşünülür ($\underset{t\to\infty}{y(t)}\to\infty$). Bu durumdaki $y(t)$ sistem çıkışı aşağıdaki değişimleri gösterir.

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=c_1e^{4\,t}+c_2e^{5\,t}$$

Not : c_1 ve c_2 sistem katsayıları başlangıç koşullarıyla hesaplanır.

SONUÇ : Öz değerler reel ve pozitif ise sistem kararsız davranır ($\lambda_i>0$)



Şekil 17 Poziitif öz değerlerin ($\lambda_1=4$, $\lambda_2=5$) sistem kararlılığı üzerindeki etkisi

Örnek

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$ Kare matrisinin öz değerlerini hesaplayın.

Çözüm

Bunun için $(\lambda_i\, \mathbf{I}-\mathbf{A})\, \mathbf{x}_i = 0$ gereği, $|\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}|$ karakteristik polinomundan, $|\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ karakteristik denklemini oluşturalım. Köşegen matris **I**,

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}=\lambda\,\mathbf{I}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda-6 & -5 \\ 8 & \lambda+6 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-6 & -5 \\ 8 & \lambda+6 \end{vmatrix}=(\lambda-6).(\lambda+6)-[-5.8]=\lambda^2-36+40=\lambda^2+4$$

$|\lambda\,\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ için öz değerler,

$$\lambda^2+4=0 \;\rightarrow\; \lambda^2=-4=4j^2$$

$$\lambda_1=2j \quad \text{ve} \quad \lambda_2=-2j$$

Öz değerler kompleks (imajiner) olarak elde edilmiştir. İlk olarak $\lambda_1=2j$ kompleks öz değerine karşılık gelen kompleks öz vektörü hesaplamaya çalışalım.

$(\lambda_1\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\,\mathbf{x}_1=0$ için

$$(\lambda_1\,\mathbf{I}-\mathbf{A})\,\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} \lambda-6 & -5 \\ 8 & \lambda+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2j-6 & -5 \\ 8 & 2j+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2j-6 & -5 \\ 8 & 2j+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} (j-3)x_1-5x_2/2=0 \\ 4x_1+(j+3)x_2=0 \end{matrix}$$

$$x_1=\frac{5x_2}{2(j-3)} \rightarrow x_1=\frac{5(-j-3)x_2}{2(j-3)(j+3)}=\frac{-5(j+3)x_2}{2(j^2-3^2)}=\frac{-5(j+3)x_2}{2(-1-9)}=\frac{-5(j+3)x_2}{2(-10)}=\frac{(3+j)x_2}{4}$$

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (3+j)x_2/4 \\ x_2 \end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix} (3+j)/4 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (3+j)/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi $\lambda_2=-2j$ kompleks öz vektörüne karşılık gelen ikinci kompleks öz vektörü hesaplayalım.

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} (3+j)/4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} -(3+j)/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kompleks öz değerlere karşılık gelen öz vektörlerde kompleks ve eşleniktir.

Tam kompleks öz değerler ve sistem davranışı :

Sistemin öz değerleri kompleks ise sistemin davranışı aşağıdaki çıkış denkleminden belirlenir.

$$y(t) = c_1 e^{j\lambda_1 t} + c_2 e^{j\lambda_2 t} + c_3 e^{j\lambda_3 t} + \cdots + c_n e^{j\lambda_n t}$$

$$y(t) = e^{\lambda t} = e^{\pm j\omega t}$$
$$y(t) = e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t \quad \text{Euler denklemi}$$

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \qquad ; \qquad \cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$$
$$e^{-j\alpha} = \cos\alpha - j\sin\alpha \qquad \qquad \sin\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}$$

Euler eşitlikleri

Buna göre ele aldığımız örnekte elde edilen $\lambda_{1,2} = \pm 2j$ kompleks öz değerlerini dikkate aldığımızda aslında $\omega = 2$ rad/sn olduğundan,

$$\cos\omega t = \cos 2t = \frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2} \quad ; \quad \sin\omega t = \sin 2t = \frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}$$

Denklemde yer alan $\cos\omega t, \sin\omega t$ gibi sinusoid fonksiyonlardan dolayı sistemde dalgalanma/osilasyon oluşması, kararlılığı engellemektedir. Bu durumda sistemde kararlılık ve kararsızlık arasında bir karekter olarak **marjinal kararlı** davranacaktır. Sistem için riskli olan bu durumda sistemin dalgalı yani osilasyonlu/titreşimli olması kararlılığı tehdit etmektedir. Sistem ne tam anlamıyla sükûnete ($\underset{t\to\infty}{y(t)\to 0}$) ne de sonsuza ($\underset{t\to\infty}{y(t)\to 0}$) gitmemekle beraber yine de oluşturmaktadır.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ Matrisinin öz değerlerini hesaplayın.

Çözüm

Bunun için $(\mathbf{A} - \lambda_i\,\mathbf{I})\,\mathbf{x}_i = 0$ gereği, $|\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}|$ karekteristik polinomundan, $|\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}| = 0$ karakteristik denklemini oluşturalım. Köşegen matris **I**,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z} = \lambda\,\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 10 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 10 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda).(8-\lambda) - [10.(-2)] = \lambda^2 - 12\lambda + 32 - [-20] = \lambda^2 - 12\lambda + 32 + 20$$

$\left| \mathbf{A} - \lambda\ \mathbf{I} \right| = 0$ için,

$$\lambda^2 - 12\lambda + 52 = 0 \ \rightarrow\ \lambda_{1,2} = 6 \pm j4 \ \rightarrow\ \lambda_1 = 6 + j4 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 6 - j4$$

Öz değerler reel kısmından dolayı yarı kompleks olarak elde edilmiştir. İlk olarak $\lambda_1 = 6 + j4$ için öz vektörü hesaplamaya çalışalım.

$(\mathbf{A} - \lambda_1\ \mathbf{I})\ \mathbf{x}_1 = 0$ için

$$(\mathbf{A} - (6 + j4)\ \mathbf{I})\ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 10 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-(6+j4) & 10 \\ -2 & 8-(6+j4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-6-j4 & 10 \\ -2 & 8-6-j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2-j4 & 10 \\ -2 & 2-j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-(2 + j4)x_1 + 10x_2 = 0$$
$$-2x_1 + (2 - j4)x_2 = 0$$

$$x_2 = \frac{(1+j2)x_1}{5} x_1 \rightarrow x_1 = (1-j2)a \ \text{ için } \ x_2 = \frac{(1+j2)(1-j2)a}{5} = \frac{(1^2 - (-j2)^2)a}{5} = \frac{(1+4)a}{5} = \frac{5a}{5} = a$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-j2)a \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1-j2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Öz değerler reel kısmından dolayı yarı kompleks olarak elde edilmiştir. İlk olarak $\lambda_2 = 6 - j4$ için öz vektörü hesaplamaya çalışalım.

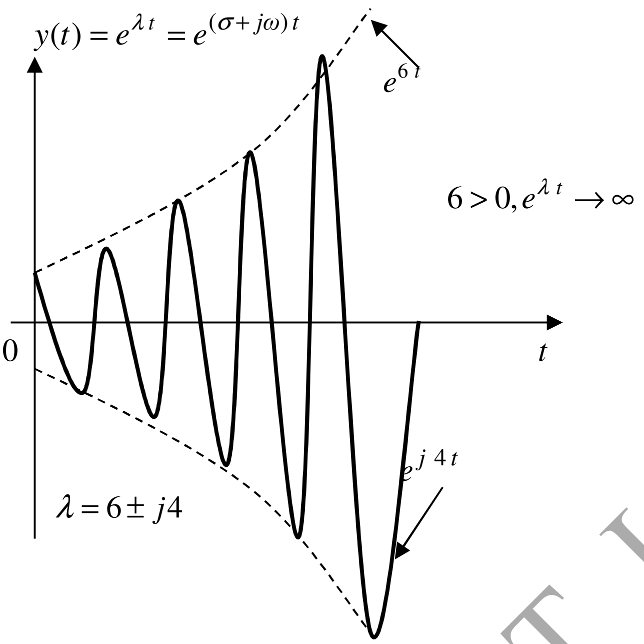
$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+j2)a \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1+j2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 6 + j4 \ \text{ için } \ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1-j2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 6 - j4 \ \text{ için } \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1+j2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = c_1 e^{(6+j4)t} + c_2 e^{(6-j4)t} = c_1 e^{6t} e^{j4t} + c_2 e^{6t} e^{-j4t}$$
$$= c_1(\cos 4t + j\sin 4t)e^{6t} + c_2(\cos 4t - j\sin 4t)e^{6t}$$

c_1 ve c_2 sistem katsayıları başlangıç koşullarıyla hesaplanır.

Öz değerler yarı kompleks ve reel kısmı pozitif ise sistem kararsız davranır ($\lambda = a \pm j\omega$, $a > 0$)



Şekil 24 **REZONANS :** Sabit frekanslı, genliği zamanla monoton artan sönümsüz/kararsız sinusoidal olan **kararsız** sistem : $y(t)=e^{\lambda t}=e^{(\sigma\pm j\omega)t}=e^{(6\pm j4)t}$

Örnek

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{bmatrix}$ Matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini hesaplayın.

Çözüm

A matrisi 2 x 2 boyutlu olduğundan, üç öz değer ve bunlara karşılık gelen iki lineer bağımsız öz vektörün elde edilmesini bekliyoruz.

$$\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}=\begin{bmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\lambda & -18\\ 2 & -9-\lambda\end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -18\\ 2 & -9-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda).(-9-3)-[-18.2]=\lambda^2+6\lambda-27-[-36]=\lambda^2+6\lambda-27+36=\lambda^2+6\lambda+9$$

$$|\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}|=0$$

$$\lambda^2+6\lambda+9=(\lambda+3)^2=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-3$$

Sistemin karakteristik denkleminden $\lambda_1=\lambda_2=-3$ olarak katlı öz değerlerin söz konusu olduğunu görmekteyiz Bu durumda bu öz değere karşılık gelen öz vektörleri elde etmeye çalışalım. $\lambda_1=\lambda_2=-3$ öz değeri için,

$$(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{x}=0$$

$$\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}=\begin{bmatrix}3-\lambda & -18\\ 2 & -9-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-(-3) & -18\\ 2 & -9-(-3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3+3 & -18\\ 2 & -9+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}6 & -18\\ 2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}6x_1-18x_2&=0\\ 2x_1-6x_2&=0\end{aligned}\quad\rightarrow x_1=3x_2$$

$$x_2\rightarrow a\quad,\quad x_1=3a$$

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}3a\\ a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$$

A matrisinin iki (katlı) öz değeri olmasına karşın lineer bağımsız tek öz vektörünün $\mathbf{x}_1=(3,1)^T$ olduğunu görmekteyiz. Bu öz vektörün **A** matrise ait olduğunu

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}_1=0\quad\text{veya}\quad\mathbf{A}\mathbf{x}_1=\lambda_1\mathbf{x}_1$$

bağıntılarından gösterebiliriz.

$$\begin{bmatrix}3 & -18\\ 2 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.3+(-18).1\\ 2.3+(-9).1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-18\\ 6-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\ -3\end{bmatrix}=-3.\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\lambda_1\mathbf{x}_1$$

A matrisinin ikinci bir öz vektörü olmadığından bunu, genelleştirilmiş öz vektör yaklaşımıyla hesaplamamız gerekiyor.

$$(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k$$

bağıntısından elde edebiliriz.

$$(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k\rightarrow(\mathbf{A}-\lambda_2\,\mathbf{I})\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1$$

$$(\mathbf{A}-\lambda_2\,\mathbf{I})\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1$$

$$\begin{bmatrix}3-\lambda & -18\\ 2 & -9-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3-(-3) & -18\\ 2 & -9-(-3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3+3 & -18\\ 2 & -9+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6 & -18\\ 2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{aligned}6x_1-18x_2&=3\\ 2x_1-6x_2&=1\end{aligned}\quad\rightarrow\quad x_1=\frac{1+6x_2}{2}\quad,\quad x_2=0\ (\text{keyfi})\rightarrow\ x_1=\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ 0\end{bmatrix}$$

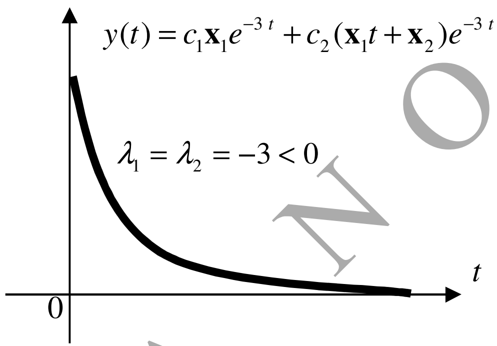
Verilen örnekte katlı öz değerler katlı ve negatif ($\lambda_1=\lambda_2=-3<0$) olduğundan, genel çıkış ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{x}_1 e^{\lambda\, t} + c_2 (t\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) e^{\lambda\, t} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3\,t} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t\ e^{-3\,t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3\,t} \right)$$

Çıkış ifadesindeki $t\ e^{-3\,t}$ teriminin zaman sonsuz geniş iken $(t \to \infty)$ sıfıra gideceğini biliyoruz. Çünkü sistemdeki öz değer negatif $(\lambda_1 = \lambda_2 = -3 < 0)$ durumdadır. Bu durumda $\underset{t\to\infty}{t\ e^{-3\,t}} \to 0$ olacağı söylenebilir.

$$\underset{t\to\infty}{t\ e^{-3\,t}} = (\infty)\ e^{-3\,\infty} = (\infty)\ e^{-\infty} = (\infty)\ \frac{1}{e^{\infty}} = (\infty) \times \frac{1}{\infty} = \infty\ \times 0 \to 0$$

Negatif öz değere sahip $e^{\lambda\, t}$ exponensiyeli, zamanın sonsuz olmasından önce $(t \to \infty)$ daha kısa sürede kendisini sıfırlayacağından sistemin toplam çıkışıda sonsuz değil, sıfır olur $(\underset{t\to\infty}{t\ e^{-3\,t}} \to 0)$. Bu genel ifadenin ışığında sistem katlı öz değerlerinin negatif veya pozitif olması halinde sistem davranışı olarak $y(t)$ çıkışı aşağıdaki değişimleri gösterir.



Şekil 25 Negatif katlı reel öz değerlerin ($\lambda_1 = \lambda_2 = -3$) sistem üzerindeki etkisi

Sonuçta, öz değerler katlı, reel ve negatif ise sistem kararlı davranır ($\lambda_i < 0$)