SİNYALLER

Elektriki açıdan enerjisi ve frekansı olan dalga işaret olarak tanımlanır. Alternatif olarak " **kodlanmış sinyal/işaret** " de uygun bir tanım olabilir.

$$s(t) = 15t^2$$

$$s(x, y) = y^2 + 6xy - 9y + 5x - 7x^2$$

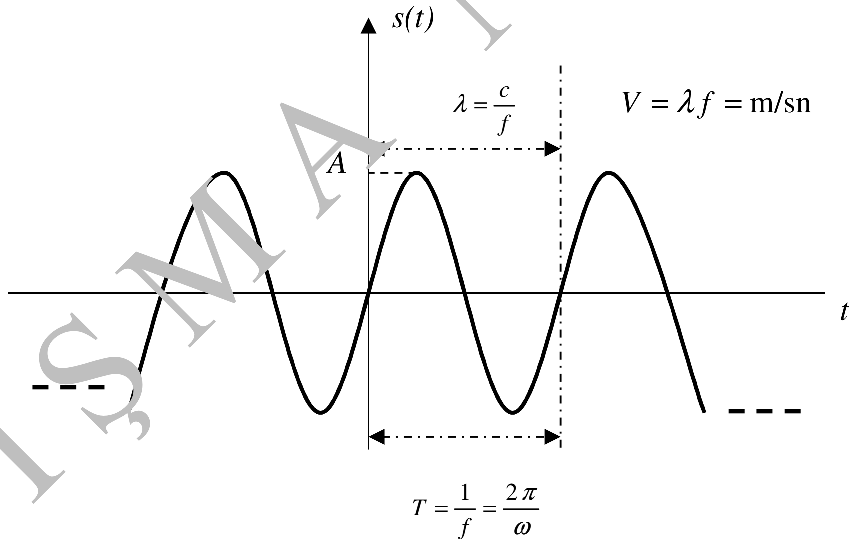
$$s(x, y, t) = 4x - 2xy + 3x^2 + 5t - 6xt + y^2$$

Multichannel ve Multidimensional Sinyaller (çok kanallı ve çok boyutlu sinyaller)
.

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \end{bmatrix} , \quad \mathbf{I}(x, y, t) = \begin{bmatrix} I_r(x, y, t) \\ I_g(x, y, t) \\ I_b(x, y, t) \end{bmatrix}$$

Sinyal ve Temel kavramlar

$$\omega = 2\pi f$$



Şekil 1. Temel işaret parametreleri

Bununla birlikte dalganın hızı ise, dalganın boyu ile frekansının çarpımına eşittir.

$$V = \lambda f = \text{m/sn}$$

Period (T) : Bir saykılın zaman olarak uzunluğu
Dalga boyu (λ) : Bir periyodun/saykılın mesafe olarak uzunluğu
Frekans (f) : Saniyedeki salınım (period,saykıl) sayısı
Faz : Bir sinyalin referans bir noktaya göre başlangıç anını gösterir (şekilde faz farkı $\theta = 0$).

Sinyalin Temel Parametreleri

Eğer genel bir sinyal , $x(t) = A\sin(B\ t \mp C)$ olarak düşünülürse temel parametre olarak,
$A =$ genlik
$B = \omega = 2\pi f$ = açısal hız $\rightarrow$ f = frekans (Hz)
$C =$ faz

Örnek

Bir alternatif akım güç/gerilim kaynağına ait verilen $v(t) = 16\sin(10\pi\ t - 30^0)$ işaretinin genliğini, frekansını, fazını ve dalga boyunu bulun.

Çözüm

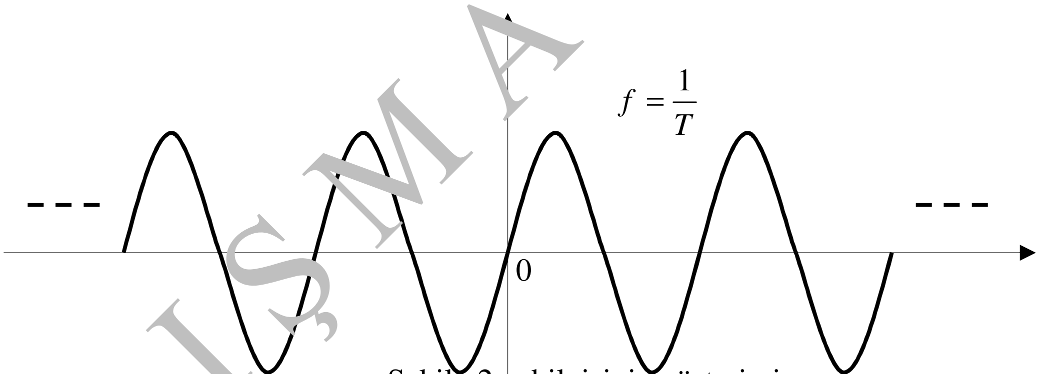
Genel $v(t) = A\sin(B\ t \mp C)$ işaretiyle karşılaştırıldığında genlik, açısal hız, frekans ve faz

$$A = 16 \text{ volt} \quad , \quad \omega_0 = 2\pi f = 10\pi \rightarrow f = 5 \text{ Hz} = B \quad , \quad C = -30^0$$

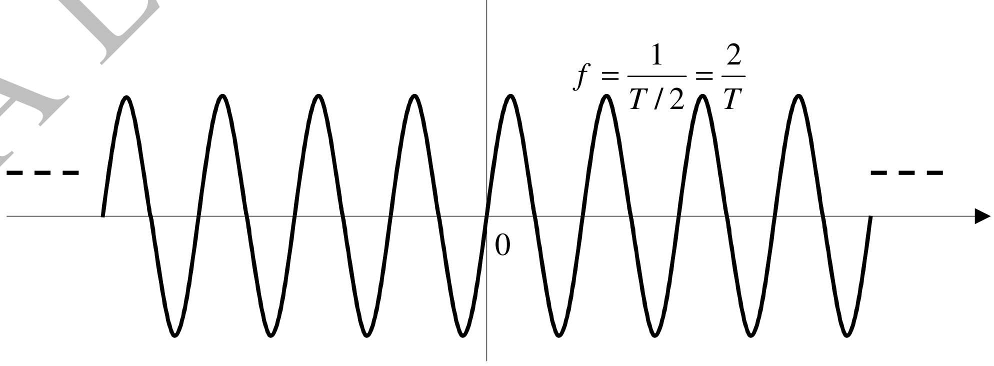
Bir periyodluk/devirlik süre olarak bilinen dalga boyu saniyede 300 bin kilometre veya 300 milyon metre hızıyla hareket etmekte olup, ışık hızının frekansa bölümüyle elde edilir.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8}{5} = 6.10^7 \text{ m}$$

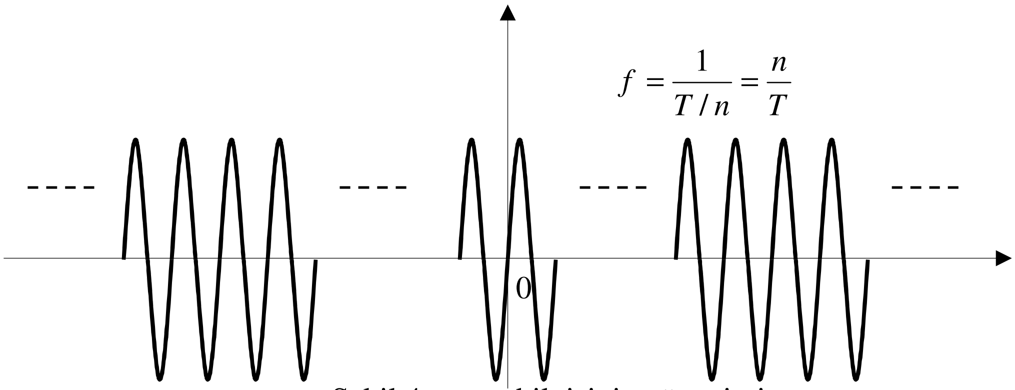
Bilgi, frekans ve dalga boyu



Şekil 2 a bilgisinin gösterimi



Şekil 3 2a bilgisinin gösterimi



Şekil 4. $n \times a$ bilgisinin gösterimi

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Sürekli Zaman Sinyallerinin Band genişlikleri

İşaretin band genişliğinin bilinmesi önemlidir. Band genişliği bilinen sinyalin nasıl bir haberkleşeme kanalından iletileceği belli olur.

$$\text{Band Genişliği} = f_{\max} - f_{\min}$$

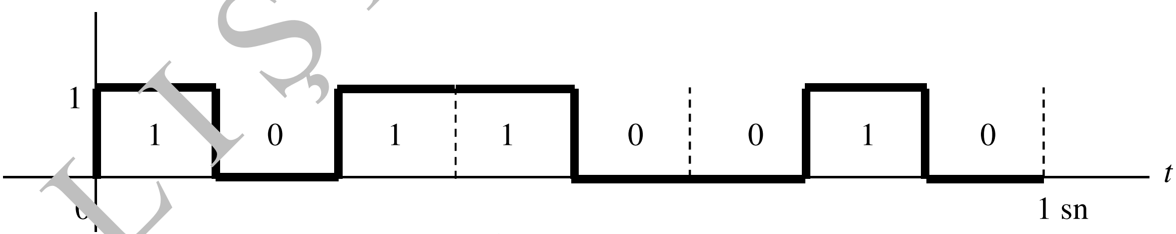
Not : Analog işaretin band genişliği, en yüksek ve en düşük frekansların farkıdır.

Sayısal İşaretlerin Band Genişlikleri

Sayısal işaret işlemede veya sayısal data ile ilgili band genişliği değerlendirmesinde frekanstan ziyade saniyedeki bit sayısı (bps, bit per second, saniye başına düşen bit miktarı) dikkate alınır.

Örnek

Değişimi aşağıda verilen işaretin band genişliğini hesaplayın.



Şekil 5. Sayısal sinyal

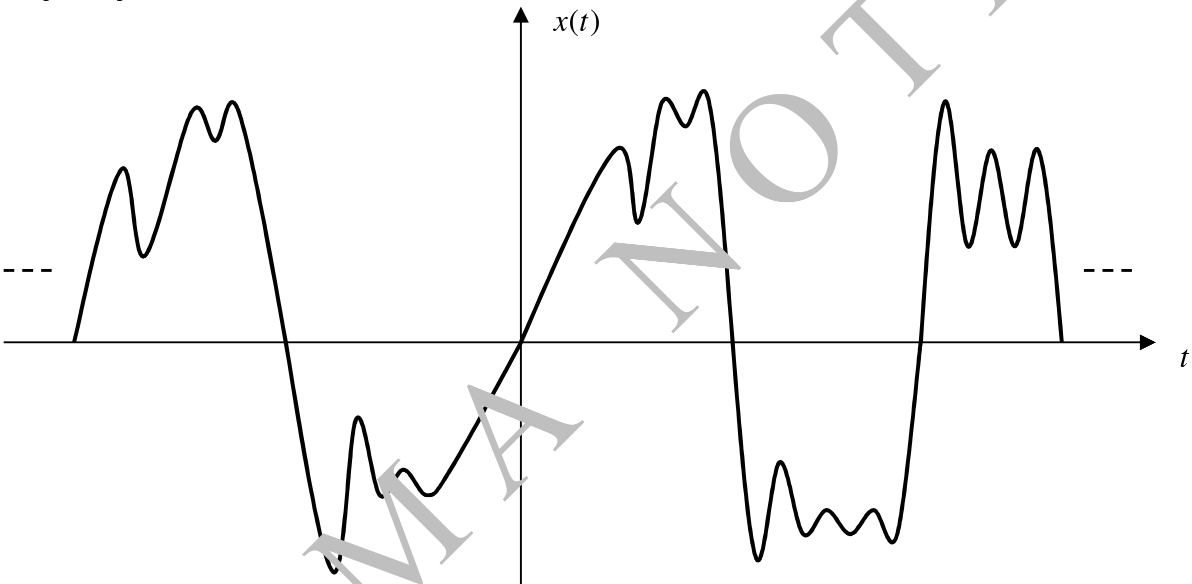
Çözüm

Görünüşe göre 8 bitten oluşan 10110010 verisi (0 veya 1 bit olarak anılır) bir saniyede taşınmaktadır veya iletilmektedir. Saniyede taşınan veri miktarı bit olarak göz önüne alındığından sayısal sinyalin band genişliği 8 bps dır.

Sinyalin Enerjisi

Şekil 6.Yapılan iş

Sinyalin enerjisi gerek sinyalin kendisi gerekse de kullanıldığı sistem açısından önemli sonuçları içerir.



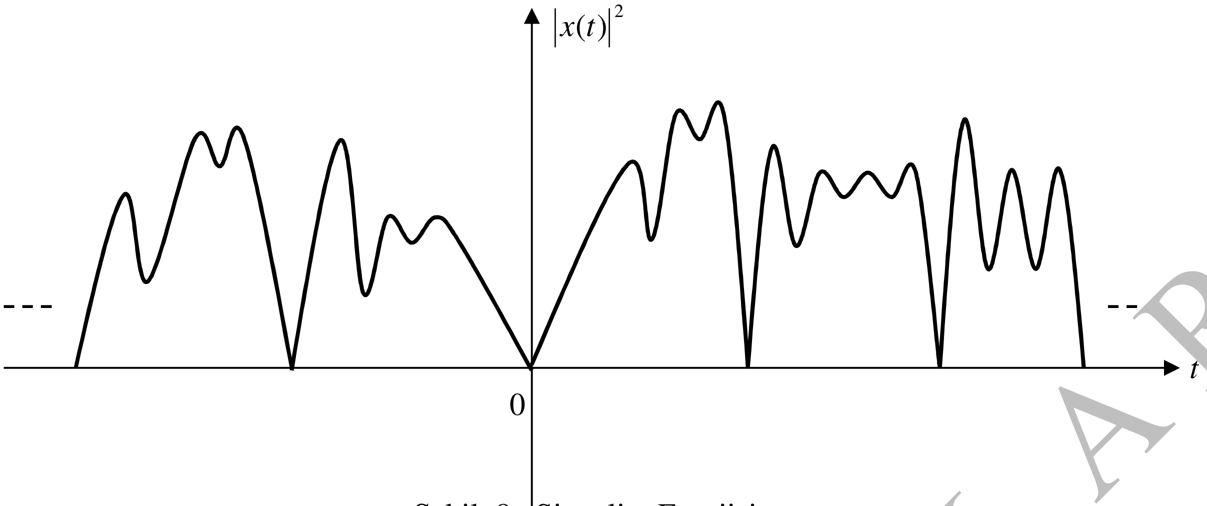
Şekil 7. Sürekli işaret

$$E = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt$$

$\langle x(t), x(t) \rangle$ yaklaşımıyla aynı işaretin kendisiyle çarpımı gibi bir sonuç ortaya çıkarki bunun sebebide, işaretin kendisinin (bir başkasının değil) enerji veya güç gibi bir özelliği ölçülmek istenmektedir.

$$x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$$

$$E = \langle x(t), x^*(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt$$



Şekil 8. Sinyalin Enerjisi

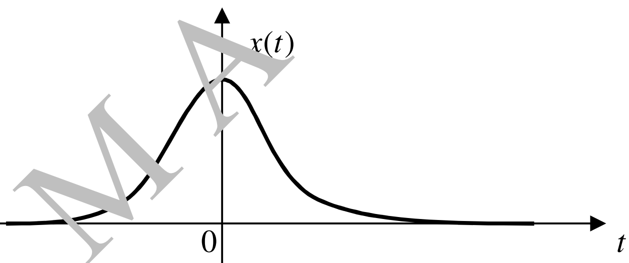
Not : Periyodik işaretin kareli değeri (enerjisi), sonlu bir değer olmayıp sonsuzdur.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

$$E = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \left| x[N] \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2$$

Bir işaretin enerjisini hesaplayabilmek için işaretin sonlu (finite) ve $t \to \infty$ için genliğinin sıfır olması koşulu aranır. Aksi taktirde, verilen integraller bir değere yakınsamayabilir.

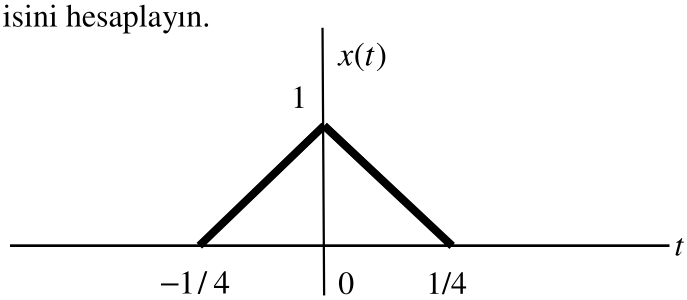
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$



Şekil 9. Sonlu enerjili sinyal (enerji işareti)

Örnek

Aşağıdaki işaretin enerjisini hesaplayın.



Şekil 10. Üçgen darbe

Çözüm

Periyodik olmayan, zamanda sınırlı ($\tau = 1/2$ birim genişliğinde) bir işaret söz konusu olduğundan verilen işaret enerji işareti olup, enerjisi hesaplanabilir. Bunun için işaretin

$(-1/4,0)$ ve $(0,1/4)$ aralıklarındaki doğru denklemlerini elde etmeliyiz. İlk olarak $(-1/4,1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini elde edelim.

$$\frac{y-1}{1-0}=\frac{x-0}{0-(-1/4)} \rightarrow \frac{y-1}{1}=\frac{x}{\frac{1}{4}} \rightarrow y-1=4x \rightarrow y=4x+1$$

$y_1(t)=4t+1$

Şimdi de $(0,1/4)$ aralığı için (1/4,1) noktalarından geçen doğrunun denklemini yazalım.

$$\frac{y-1}{1-0}=\frac{x-0}{0-1/4} \rightarrow \frac{y-1}{1}=\frac{x}{-\frac{1}{4}} \rightarrow y-1=-4x \rightarrow y=-4x+1$$

$y_2(t)=-4t+1$

Üçgen dalga çift fonksiyon olduğundan,

$$E=E_1+E_2=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2\,dt=\int_{-1/4}^{0}|4t+1|^2\,dt+\int_{0}^{1/4}|-4t+1|^2\,dt=2\int_{0}^{1/4}|-4t+1|^2\,dt$$

$$=\int_0^{1/4}(16t^2-8t+1)dt=32\int_0^{1/4}t^2dt-16\int_0^{1/4}tdt+2\int_0^{1/4}dt=32\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{1/4}-16\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1/4}+2\left[t\right]_0^{1/4}$$

$$=32\left[\frac{(1/4)^3}{3}-\frac{0}{3}\right]-16\left[\frac{(1/4)^2}{2}-\frac{0}{2}\right]+2\left[\left(\frac{1}{4}\right)-0\right]=32\left[\frac{1}{64.3}\right]-16\left[\frac{1}{16.2}-\frac{0}{2}\right]+2\left[\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$E=\frac{1}{6}$ Joule

Not : Enerji sonlu değerde çıktığı için verilen dörtgen sinyal, enerji sinyalidir.

Periyodik Sinusoidlerin Gücü

Örnek

a) $x(t)=12\sin 2\pi\, t$ b) $y(t)=4\sin 8\pi\, t$ c) $z(t)=12\sin 4\pi\, t$ Hangi işaret daha güçlüdür?.

Çözüm

$$s(t)=A\sin(Bt\pm C)$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt$$

İspat :

1) $P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|12\sin 2\pi\, t|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}144\sin^2 2\pi\, t\,dt$

$P_x=72$ Watt

Not : $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2} \rightarrow \sin^2 2\pi\, t=\frac{1-\cos 4\pi\, t}{2}$

2) $P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|12\sin 4\pi\, t|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}144\sin^2 4\pi\, t\,dt$

$P_z = 72$ Watt

3) $P_y = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |4 \sin 8\pi \, t|^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 16 \sin^2 8\pi \, t \, dt$

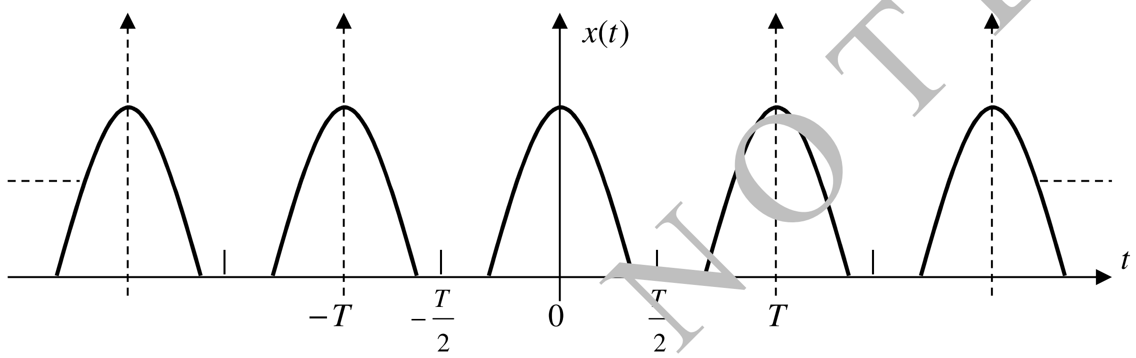
$P_y = 8$ Watt

$P_x = 72$ Watt , $P_y = 8$ Watt ve $P_z = 72$ Watt

Sonuç : $P_x = P_z > P_y$

Sinyalin Gücü

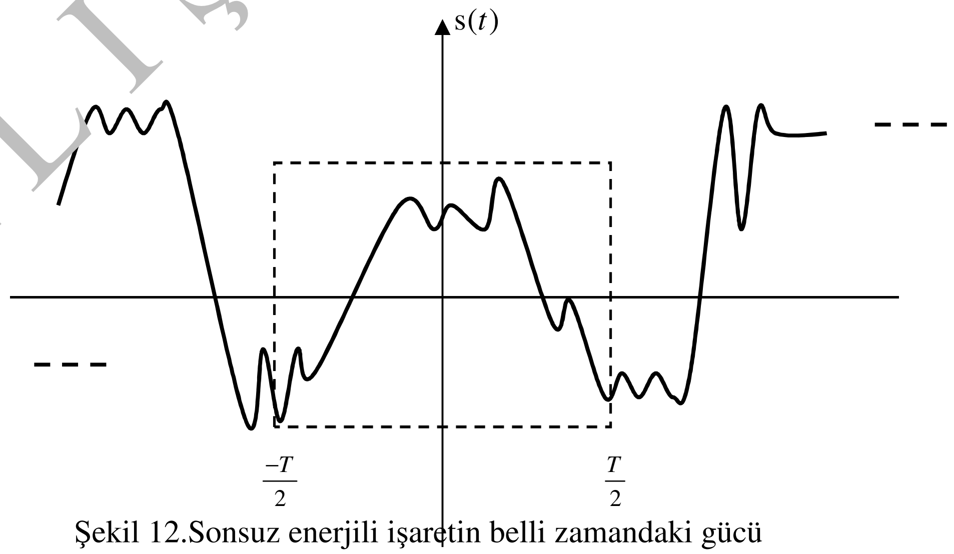
Bazen verilen bir işaretin enerjisi sonlu ve $t \to \infty$ için genliği sıfır olmayabilir (infinite). Bu durumda yine işaretin enerjisini hesaplanmasında bir güçlük olacaktır. Bu hallerde işaretin var olduğu bir süreç içersindeki (aralık, period) ortalama enerjisinden söz edilir. Bu şekilde ölçülen miktar işaretin gücü (power), daha doğrusu ortalama gücü olarak anılır.



Şekil 11. Periodik işaret

Bu anlamda aşağıdaki gibi görülen $x(t)$ işaretinin, gücünü yukarıdaki periyodik şekile göre $x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$ kompleks gösteriminin göz önüne ortalama güç olarak yazabiliriz.gücünü $x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$ kompleks gösterimini göz önüne alarak daha genel anlamda ortalama güç

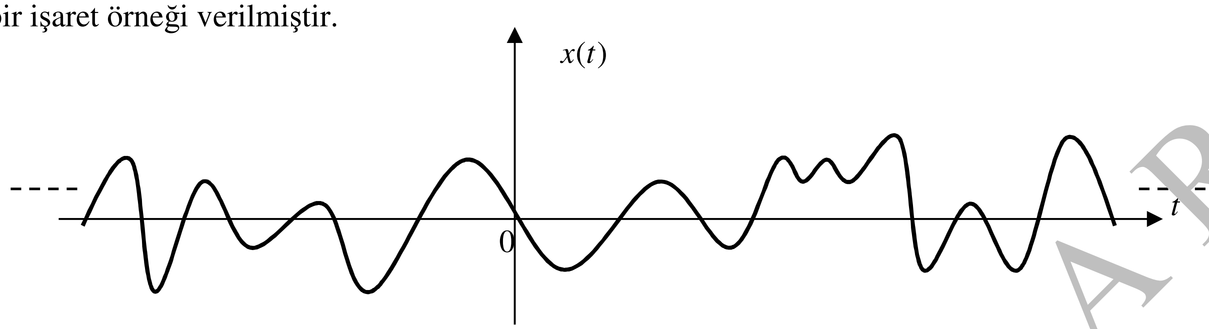
$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$ işaretin gücü (ortalama güç)



Şekil 12.Sonsuz enerjili işaretin belli zamandaki gücü

Rassal İşaretlerin Enerjisi ve Gücü : Enerji ve Güç İşareti Olmayan İşaretler

Şu ana kadar enerji ve güç işaretleri ele alındı. Şimdi her ikisinden farklı durumda olan rassal işaret (random process) olarak anılan gürültülü bir işaret örneği ele alınacaktır. Aşağıda böyle bir işaret örneği verilmiştir.



Şekil 13.Rassal işaret : ne enerji ne güç işareti

Enerji işareti güç işareti olabilirmi

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt$$

$$P_{AV} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| x(t) \right|^2 dt$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt < \infty \qquad \text{veya} \qquad 0 < E < \infty$$

olduğunu düşünürsek, sonlu bir işaretin zaman olarak $T \to \infty$ gibi sonsuz büyük bir değere bölünmesini yazarsak (mevcut enerjinin uzun zaman dilimindeki ortalama değeri),

$$P_{AV} = \frac{0 < E < \infty}{\infty} = 0$$

görüldüğü gibi ortalam güç sıfır çıkacaktır. Bu yüzden eğer bir işaret, enerji işaretiyse ortalama gücü sıfır çıkacaktır ($P_{AV} = 0$).

Sonuç : Enerji işareti güç işareti olamaz. , **Sonuç :** Güç işareti, enerji işareti olamaz.

Örnek
$f(t) = \sin t$ işaretinin tipini belirleyin.
Çözüm
a) Enerji

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin t \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 t \; dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

b) Ortalama güç

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) \right|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| \sin t \right|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 t \; dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)_{-T/2}^{T/2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{4} - \frac{\sin T}{4}\right) - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(-\frac{T}{4} + \frac{\sin T}{4}\right)$$

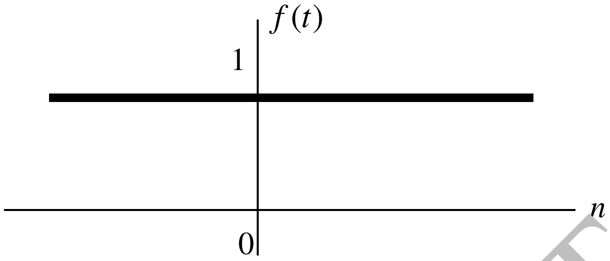
$$= \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{\sin T}{4}\right) + \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sin T}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} - 0\right) + \left(\frac{1}{4} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

(a) daki enerji sonsuz ($E \to \infty$) ve (b) de ise ortalama güç sıfırdan farklı bir değer olarak sonlu 1/2 değeriyle bulunduğu için verilen $f(t) = \sin t$ **işareti güç yani power işaretidir**. Buradan ortaya çıkan bir diğer tespitte şudur , periodik işaretler güç işaretleridir.

Örnek

$f(t) = 1$ işaretinin tipini belirleyin.

Çözüm



Şekil 14. Sürekli – zaman işareti : $f(t) = 1$

a) Enerji

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |1|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} tdt = t\,|_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

a) Ortalama güç

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |1|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, t\,|_{-T/2}^{T/2}$$

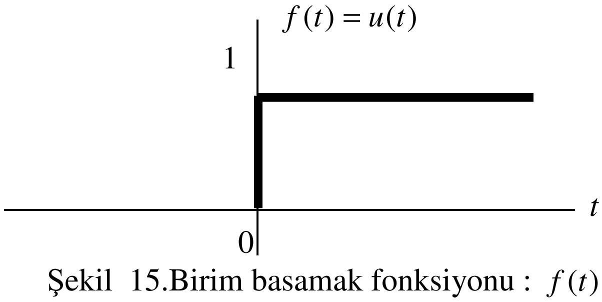
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2} - \frac{(-T)}{2}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} T = 1$$

Görüldüğü gibi bir sabitin analizi yapıldığında işaret sonsuz enerjiye ($E \to \infty$) ve sonlu ortalama gücüne ($P_{AV} \to 1$) sahip olduğu için işaret, güç işaretidir.

Örnek

$f(t) = u(t)$ işaretinin tipini belirleyin.

Çözüm



Şekil 15.Birim basamak fonksiyonu : $f(t) = u(t)$

a) Enerji

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} (1)^2\, dt = t\,|_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

a) Ortalama güç

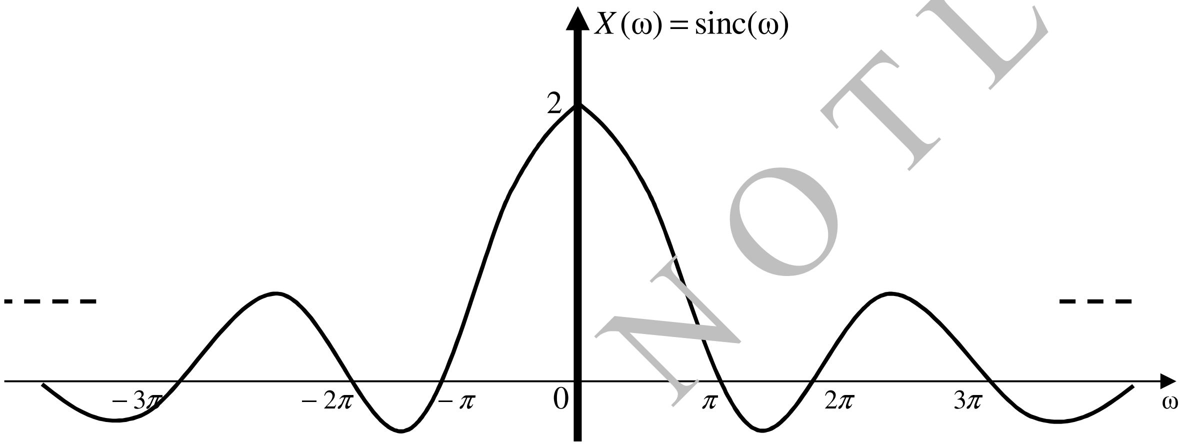
$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|f(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|u(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2}(1)^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}t\,|_0^{T/2}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\frac{T}{2}-0\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}T = \frac{1}{2}$$

(a) daki enerji sonsuz ($E \to \infty$) ve (b) de ise ortalama güç sıfırdan farklı bir değer olarak sonlu 1 değeriyle bulunduğu için verilen $f(t) = u(t)$ işareti güç yani power işaretidir.

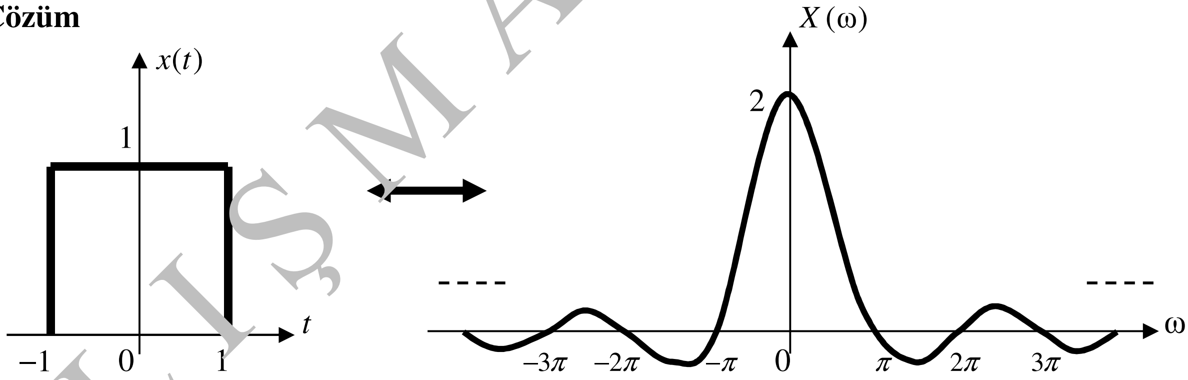
Örnek

Aşağıda değişimi görülen sinyalin tipini (enerji/güç) belirleyin.



Şekil 16. $X(\omega) = \mathrm{sinc}(\omega)$ işaretinin değişimi

Çözüm



Şekil 17. $\mathrm{rect}(t/2) \leftrightarrow 2\mathrm{sinc}(\omega)$ Dönüşümünün görünümü

Sonuç : Frekans domeninde (($\omega = 2\pi f$)) sonsuz uzunluğuyla güç sinyali gibi görünmesine rağmen, asl olan zaman uzayındaki sonlu/limitli dağılımıyla sinyal, enerji sinyalidir.

Parseval Teoremi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(\omega)\right|^2 d\omega$$

Zaman domenindeki enerji, frekans domenindekine eşittir.

Enerji/Güç Spektral Yoğunluğu

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega$$

$\left| F(\omega) \right|^2$: *Enerji/güç spektral yoğunluğu*

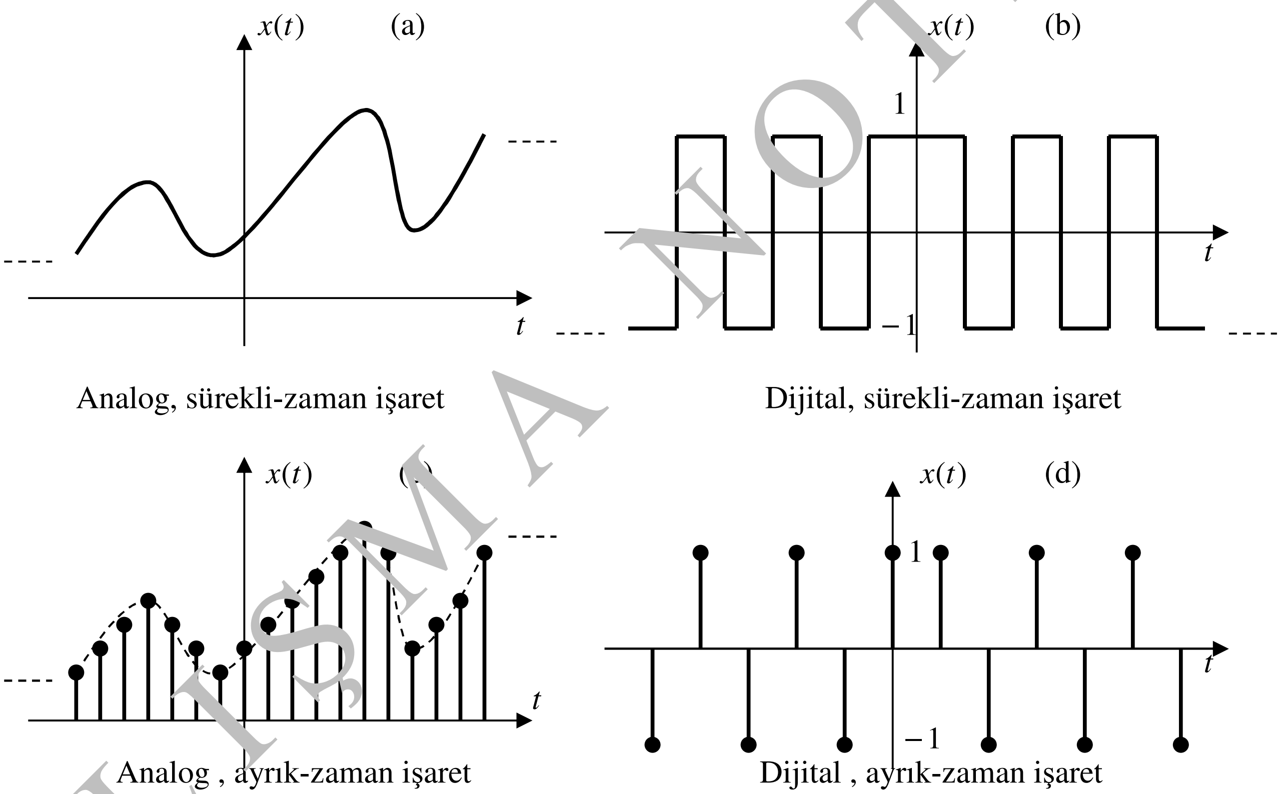
$$R_f(\tau) = f(\tau) * f(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) f^*(t) dt$$

$$R_f(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = \left| F(\omega) \right|^2$$

SİNYALLER

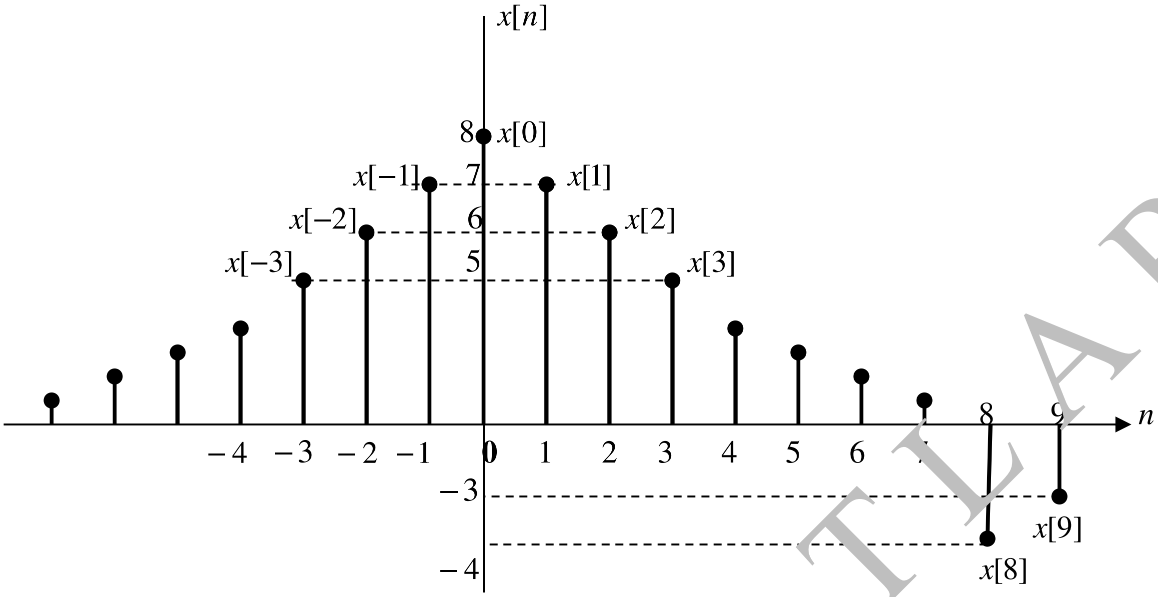
Genel Sinyal Tipleri

1. Analog – Dijital Sinyaller



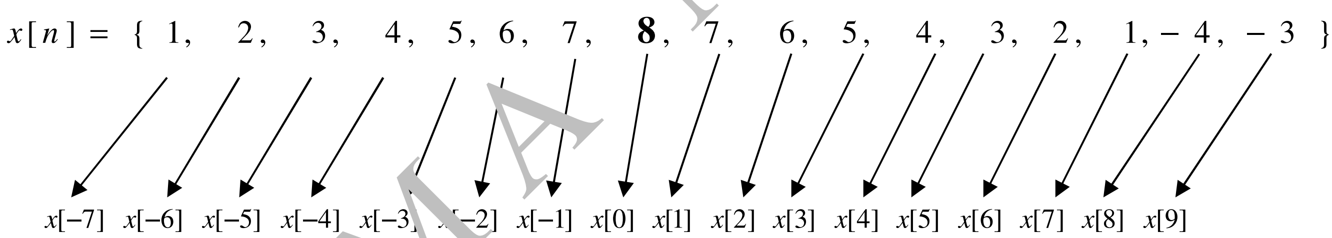
Şekil 18. Analog – Dijital işaretler

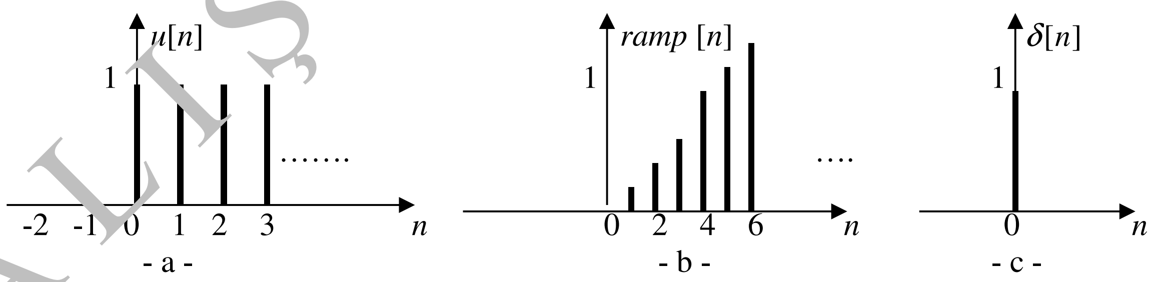
Ayrık İşaretler



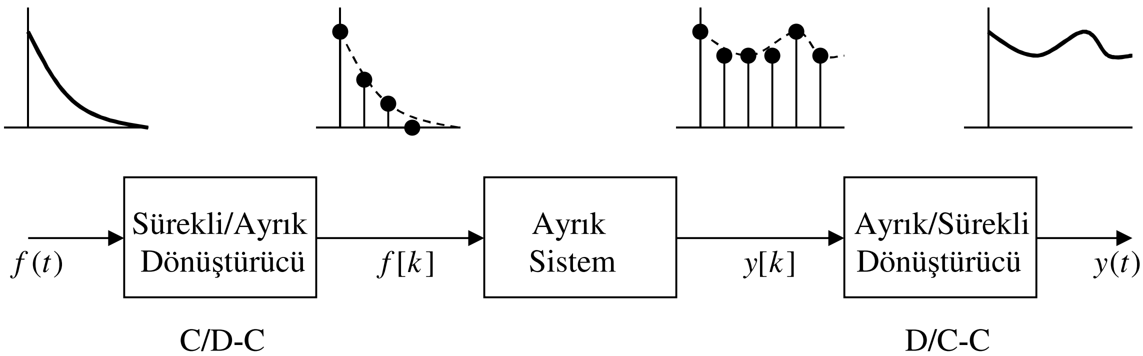
Şekil 19. Ayrık işaret

$$x[n] = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \mathbf{8},\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1, -4,\ -3\ \}$$





Şekil 20. Ayrık işaretler

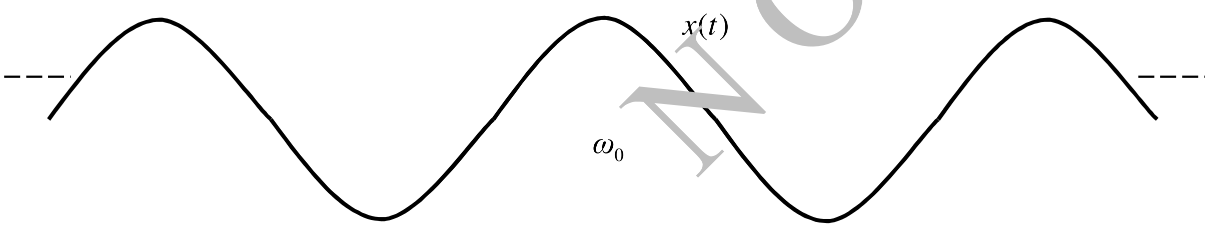


Şekil 21. Ayrık sistemde sürekli – ayrık işaretin işlenmesi

Deterministik işaretler

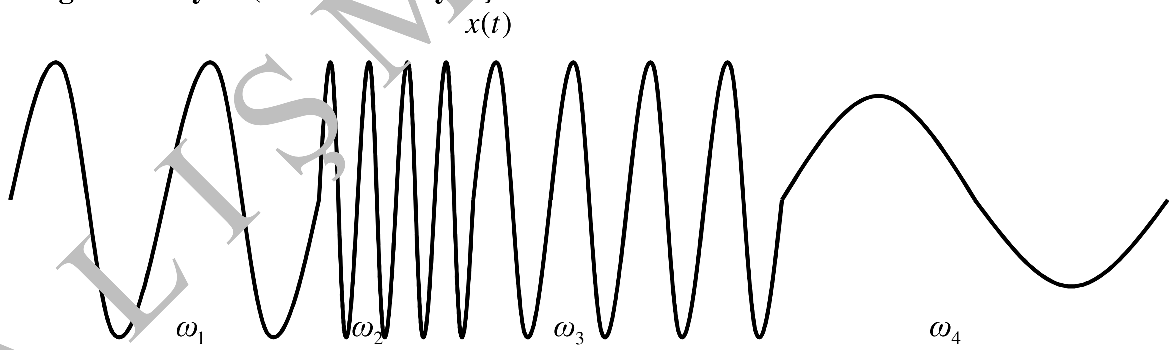
$f(t), x(t), \sin t, \cos \omega t, \cdots$.gibi. Periodik veya periodik vari işaretler bu kategoriye örnek verilebilir.

Durağan (stationary) işaretler



Şekil 22.Durağan işaret : periodik işaretler

Durağan Olmayan (nonstationary) İşaretler



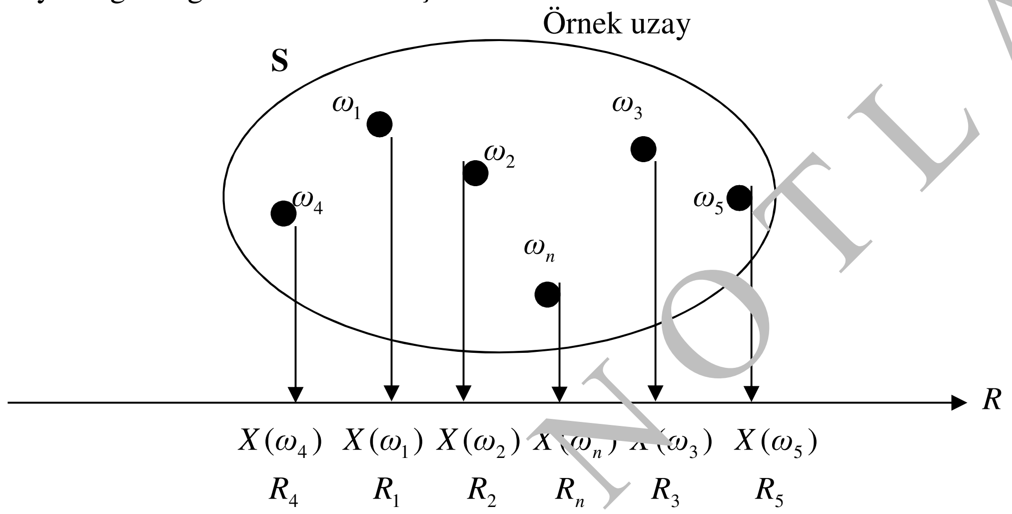
Şekil 23. Durağan olmayan işaret : $x(t) = \sin\left(2\pi f_0 t + \frac{k}{2} t^2\right)$

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$ Anlık Frekans

Rassal (random) İşaretler

Değeri deterministik işaretten farklı olarak kesin bir formüle bağlı olarak önceden kestirilemeyen, değeri rastlantı deneyi ile belirlenen işarete, rassal veya rastlantı (random) işareti denilmektedir. Bir rastlantı deneyinde, bir olaya ilişkin çeşitli sayılarda gözlem yapılır. Her bir gözlem sonucu farklı olduğundan, rastlantısal çıktılar elde edilmektedir.

Bir deneye ait sonuçların yani çıktıların (outcomes) yer aldığı uzaya örnek uzay denir ve S ile gösterilmektedir. Örnek uzayındaki her bir çıktı ω veya ω_i ile gösterilmektedir.Örnek uzayın alt kümelerine olay (event) denilmektedir. Aşağıda herhangi bir rastgele deneye ait örnek uzayının genel görünümü verilmiştir.



Şekil 24. Örnek uzayı

Görüldüğü gibi örnek uzayı bir rastgele deneyin $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ çıktılarından oluşmaktadır. Bu çıktıların çeşitli toplulukları örnek uzayın alt kümeleri anlamına gelen olayları (events) oluşturmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda gösterilmiştir.

$$S_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\ ,\ S_2 = \{\omega_4, \omega_5\}\ ,\ S_3 = \{\omega_{2n}\}\ ,\ S_4 = \{\omega_{2n-1}\} \quad \textbf{olaylar}$$

Görüldüğü gibi S_1 olayı örnek uzayın $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, $S_2 = \{\omega_4, \omega_5\}$ olayı ω_4 ve ω_5, S_3 olayı ω_{2n} gibi çift indekslileri ve S_4 olayı ise ω_{2n-1} gibi tek indeksli çıktılardan (outcomes) oluşmaktadır. Bunların ışığında rastgele değişkeni tanımlayabiliriz. Rastgele değişken sonucu deney yapılmadan bulunamayan veya bilinmeyen bir değişkendir. Bir paranın atılmadan yani deney yapılmadan sonucunun yazı veya tura olacağının bilinmemesi hadisesi tamamiyle rastgele değişken tanımı ile örtüşmektedir. Deney sonucundan paranın yazı veya tura gelmesi gerçek bir sayı (real, R) ile belirtilmektedir. Buna göre rastgele değişken bir deneyin sonucunu gerçek bir R sayısına dönüştürmektedir. Bu durumu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\omega_4 \to X(\omega_4) \to R_4\ ,\ \ \omega_1 \to X(\omega_1) \to R_1\ \ ,\ \omega_2 \to X(\omega_2) \to R_2\ ,\ \ \omega_n \to X(\omega_n) \to R_n$$

Buna göre ***X* rastgele değişken**, örnek uzayı çıktılarını *R* gerçek sayısına dönüştüren $X(\omega_n)$ gibi bir **fonksiyondur**. Bu tanımı yukarıdaki genel şekil üzerinden de teyit etmek mümkündür.

Gauss Dağılımı ve Standart Normal Dağılım

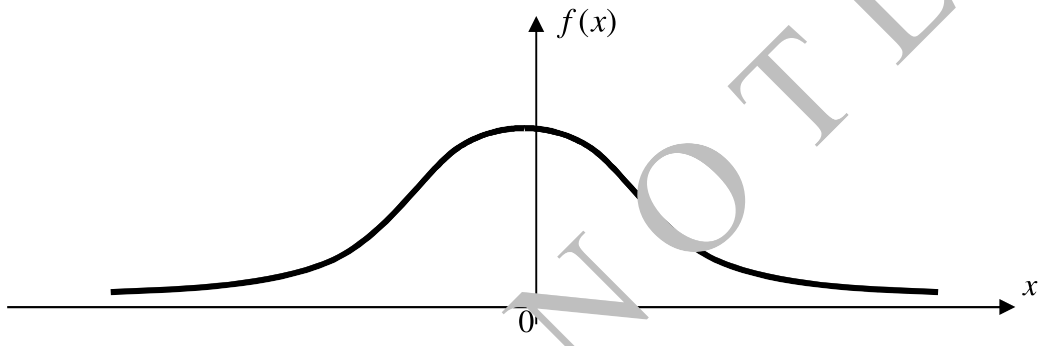
Normal dağılım olasılık ve istatistikte oldukça önemlidir ve olasılık dağılımlarının en çok kullanılanıdır. Bu dağılım ilk olarak 1733 de De Moivre, sonrasında ise 1809 da Gauss tarafından bulundu. Bu nedenle normal dağılım bazen Gauss dağılımı olarak da bilinir.

Gaussian Fonksiyon : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\mu =$ dağılımın ortalamsı , $\sigma =$ dağılımın standart sapması

Görüldüğü gibi Gaussian fonksiyonunun ortalaması $\mu = 0$ ve varyansı $\sigma^2 = 1$ alınırsa, ***standart normal dağılım fonksiyonu*** elde edilir.

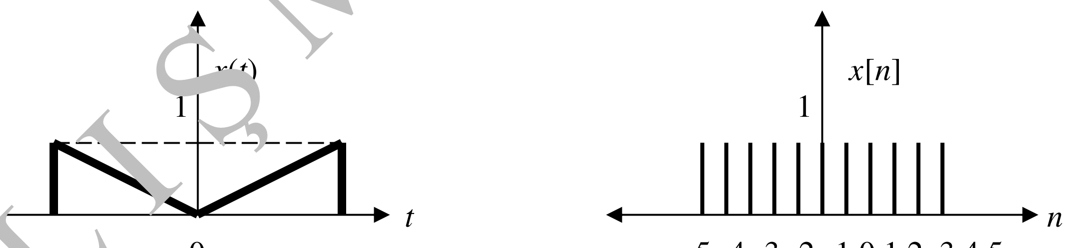
Standart Normal Dağılım Fonksiyon : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



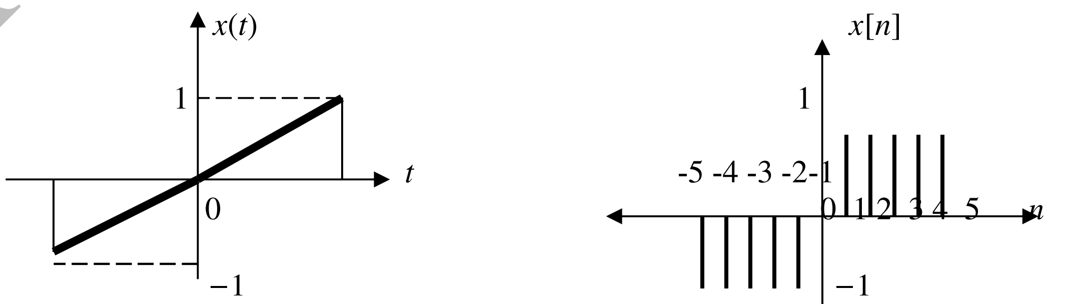
Şekil 25.Normal dağılım ($\mu = 0, \sigma^2 = 1$)

Tek ve Çift İşaretler

$$x(-t) = x(t)$$
$$x[-n] = x[n]$$



Şekil 26 Çift işaretler



Şekil 27 Tek işaretler

Örnek

$x(t) = t^2 - 5t + 8$ İşaretinin tek ve çift işaretlerini bulun.

Çözüm

$x(t) = x_{\text{çift}}(t) + x_{\text{tek}}(t)$

Verilen işaretin çift kısmı ;

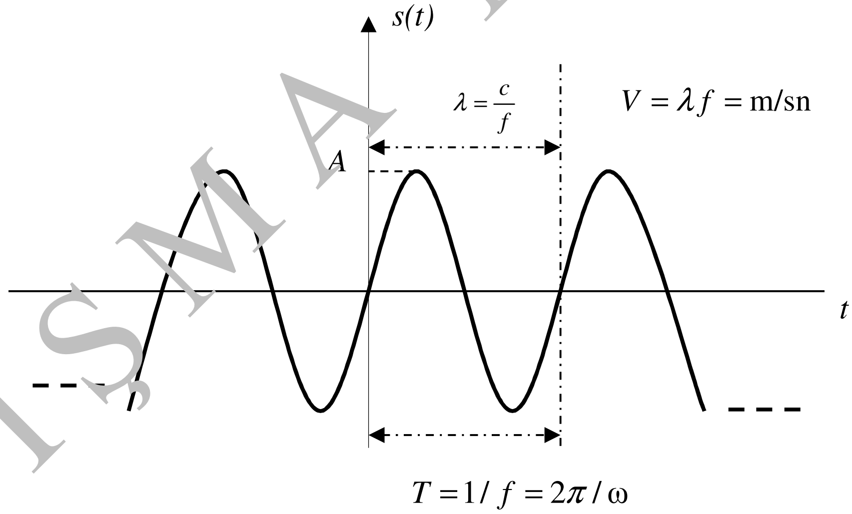
$$x_{\text{çift}}(t) = \left[\frac{x(t)+x(-t)}{2}\right] = \left[\frac{t^2-5t+8+\left[(-t)^2-5(-t)+8\right]}{2}\right] = \left[\frac{t^2-5t+8+t^2+5t+8}{2}\right] = \frac{2t^2+16}{2} = t^2+8$$

Verilen işaretin tek kısmı ;

$$x_{\text{tek}}(t) = \left[\frac{x(t)-x(-t)}{2}\right] = \left[\frac{t^2-5t+8-\left[(-t)^2-5(-t)+8\right]}{2}\right] = \left[\frac{t^2-5t+8-t^2-5t-8}{2}\right] = \frac{-10t}{2} = -5t$$

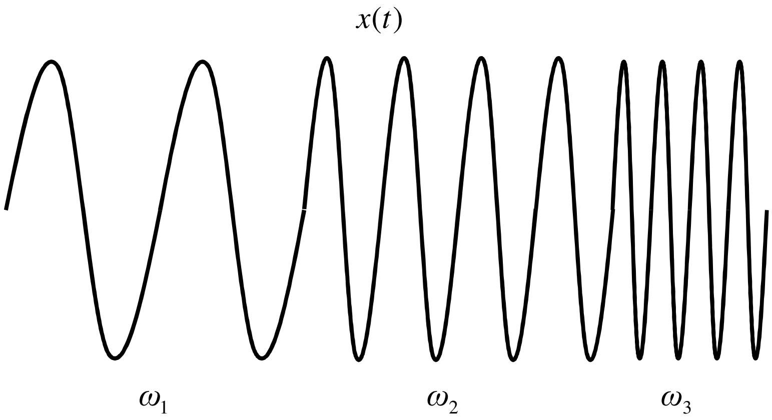
Sinusoidal Sinyaller

Sinusoidal işaret, sabit genlik, sabit frekans ve sabit fazlı sonsuz uzunlukta (sonsuza devam eden) bir işarettir. Bu yüzden $A\cos(\omega t + \theta)$ veya $A\sin(\omega t + \theta)$ tipindeki 2π periodlu işaretler, sinusoidal işaretlerin tipik fonksiyonlarını oluşturmaktadır.



Şekil 28. Sinusoidal sinyal

Değişken Genlik, Frekans ve Fazlı Sinusoidal Sinyaller



Şekil 29 ChirpDurağan olmayan işaret : $x(t) = \sin\left(\omega t + \frac{k}{2}t^2\right)$

Anlık Frekans ve Sinusoidler

$$x(t) = A\cos(\omega_C t + \theta_0) = A\cos\theta(t)$$

gibi düşünülürse, bağıntısından $\theta(t)$ genelleştirilmiş açının, zamana göre türevinden bulunur.

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$2\pi\, f_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad \text{veya} \qquad f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}$$

olarak bulunur. Buna göre eğer tek frekanslı sinusoid $\theta(t) = \omega_C t + \theta_0$ olarak düşünülürse

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_C t + \theta_0) = \omega_C \text{ rad/sn}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(\omega_C t + \theta_0) = \frac{\omega_C}{2\pi} = \frac{2\pi\, f_C}{2\pi} = f_C \text{ Hz}$$

Periyodik Sinyaller

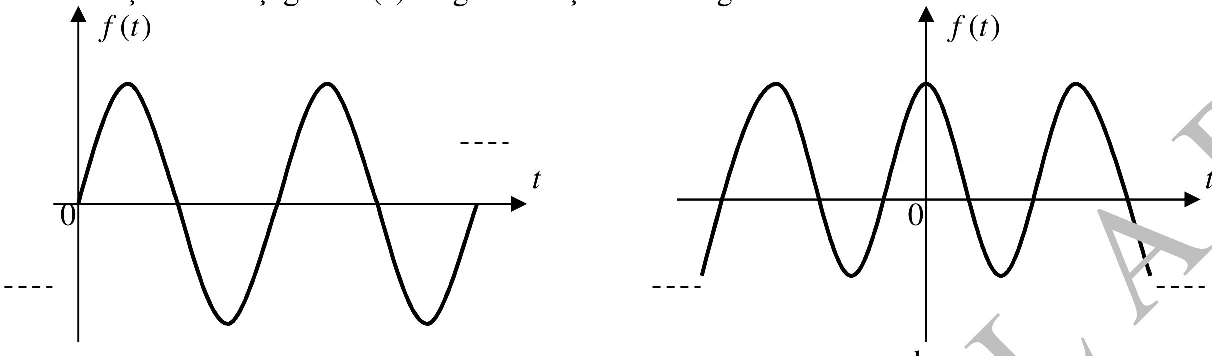
Genel anlamda bir $x(t)$ işareti sürekli veya ayrık formda

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{veya} \quad x(n) = x(n+T)$$

Periyodik İşaretlerin Nedenselliği

$f(t) = 0 \quad , \quad t < 0$

Bu tür işaretlere aşağıdaki (a) da görülen işaret örnek gösterilebilir.



Şekil 30: Nedensel/casual ve (b) : nedensel olmayan/noncausal işaretler

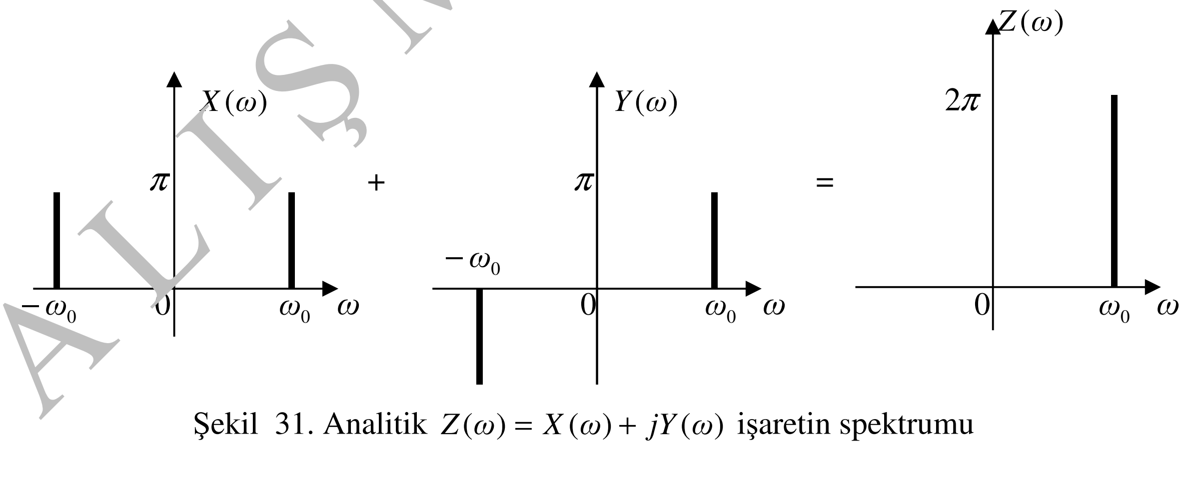
$$f(t)u(t) \quad , \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Analitik İşaret

Reel bir $x(t)$ işareti analitik işarete dönüştürülebilir Buna göre eğer gerçek bir işaret $x(t)$ ve onun Fourier transformasyonu $X(\omega)$ ile analitik işaret $z(t)$ ve onun Fourier transformasyonu $Z(\omega)$ arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega \geq 0 \\ X(0) & \omega = 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

$$z(t) = x(t) + j\, y(t)$$

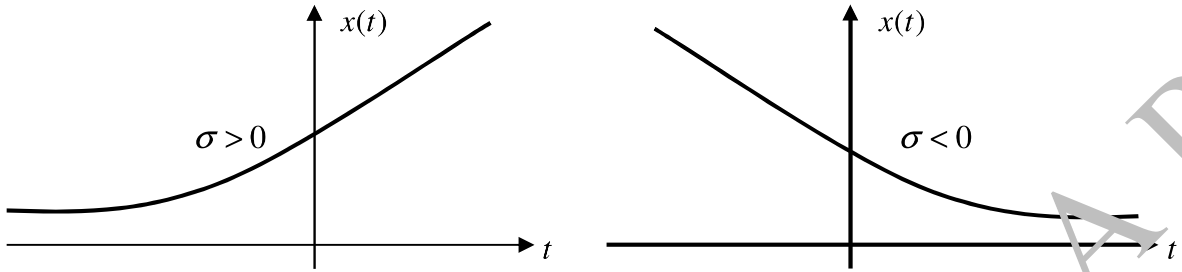


Şekil 31. Analitik $Z(\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ işaretin spektrumu

Exponensiyel İşaretler

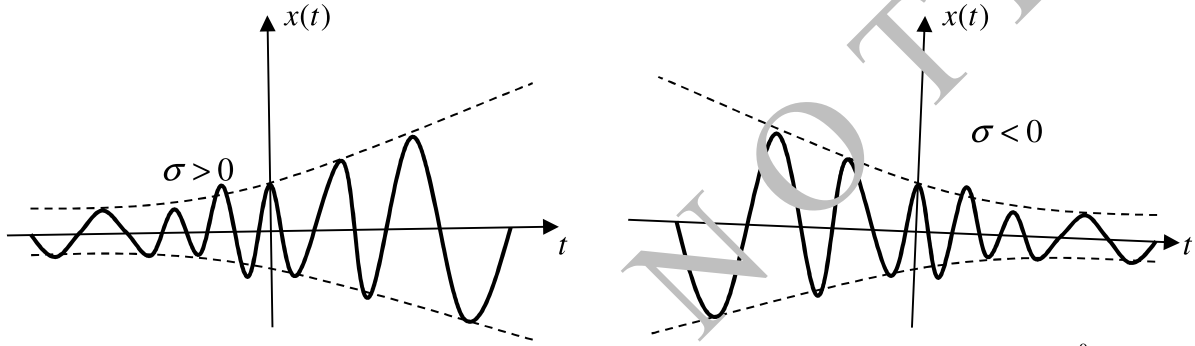
1 Gerçek exponensiyel işaretler

$x(t) = e^{\sigma t}$

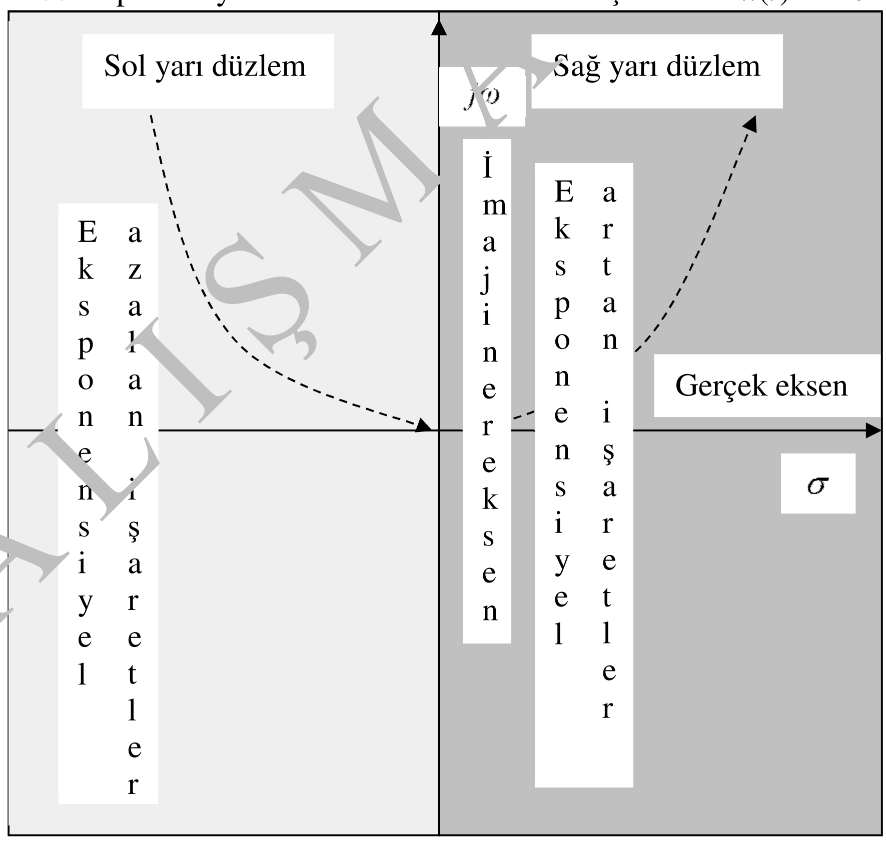


Şekil 32. Gerçek exponensiyel işaretler

2 Kompleks exponensiyel işaretler



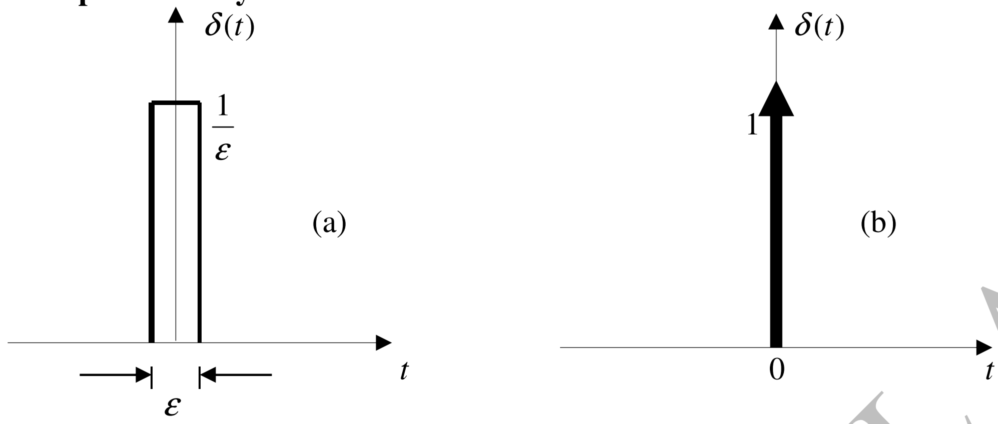
Şekil 33.Exponensiyel artan ve azalan sinüsoidal işaretler : $x(t) = A\, e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta^0)$



Şekil 34.Kompleks frekans düzlemi ($s = \sigma + j\omega$)

Özel Parçalı Fonksiyonlar

1. Birim Impuls Fonksiyonu



Şekil 35.Birim impuls (Delta fonksitonu)

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}\quad ,\qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1$$

Birim İmpuls Fonksiyonunun Özellikleri : Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984

1. $\delta(0)=1$, 2. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$, 3. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=1$, 4. $\delta(t)f(t)=f(0)\delta(t)$

5. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$, 6. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)f(t)d\tau=f(\tau)$, 7. $\delta(t)=\delta(-t)$, 8. $\delta^2(t)=\delta(t)$

Örnek

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-4)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt$ İşlemini hesaplayın.

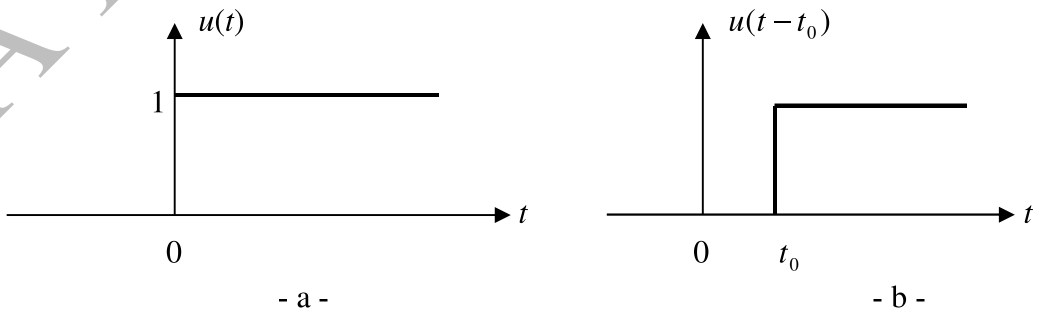
Çözüm

$\delta(0)=1$ ise , $t=4$ için $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-4)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt=\delta(4-4)\cos\left(\frac{\pi}{4}4\right)=\delta(0)\cos(\pi)=-1$

Birim Basamak Fonksiyonu

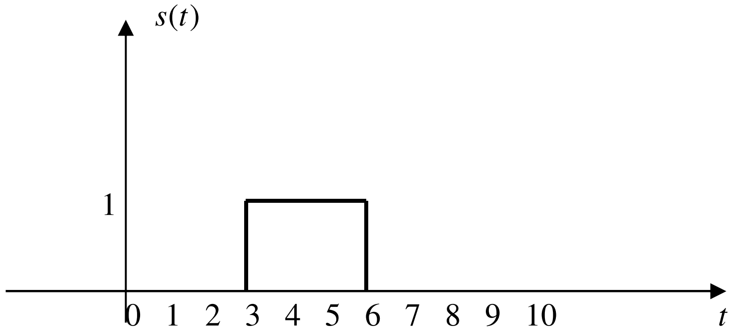
Birim adım (unit step) veya olarak bilinen bu işaretin matematiksel modeli ;

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}\quad ;\qquad u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t\geq t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$



Şekil 36. a) Birim basamak fonksiyonu , b) Kaydırılmış birim basamak fonsiyonu

Örnek $s(t) = u(t-3) - u(t-6)$



Şekil 37. İki birim basamak fonksiyonunun farkı

Örnek

$y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} u(t)\, dt$ integralini hesaplayın

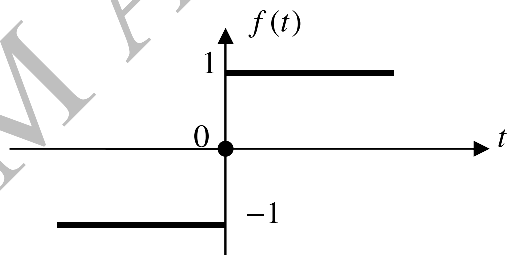
Çözüm

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} u(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2}(e^{-2t})_0^{\infty} = -\frac{1}{2}(e^{-\infty} - e^{0}) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{e^{\infty}} - 1) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{\infty} - 1) = -\frac{1}{2}(0-1)$$

$$= \frac{1}{2}$$

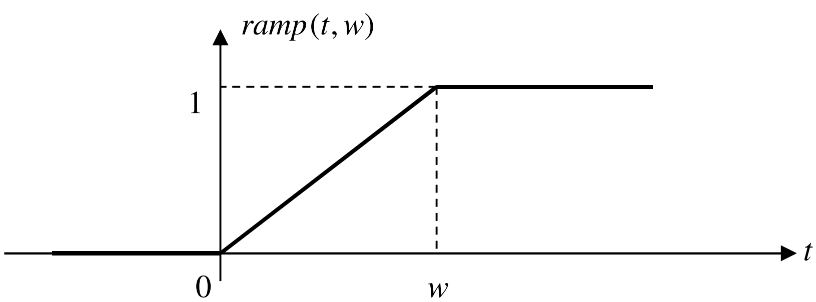
İşaret Fonksiyonu

$$f(t) = Sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{t} > 0 \\ 0 & \text{t} = 0 \\ -1 & \text{t} < 0 \end{cases}$$



Şekil 38. Süreksiz Sgn fonksiyonu

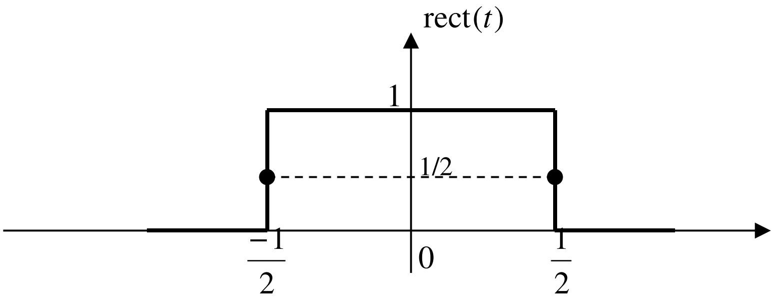
Birim rampa fonksiyonu



Şekil 39. (b): Birim rampa fonksiyonu

$$ramp(t)=\begin{cases} t & t\geq w \\ t/w & 0\leq t\leq w=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)d\lambda = tu(t) \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

Diktörtgen İşaret Fonksiyonu



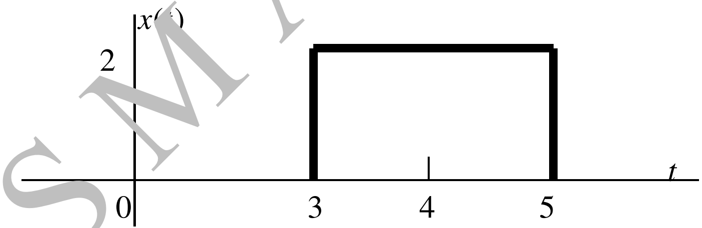
Şekil 40. Birim diktörtgen fonksiyonu

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases} 1 & |t|<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t|=\frac{1}{2} \\ 0 & |t|>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Örnek

Aşağıdaki işaretin,

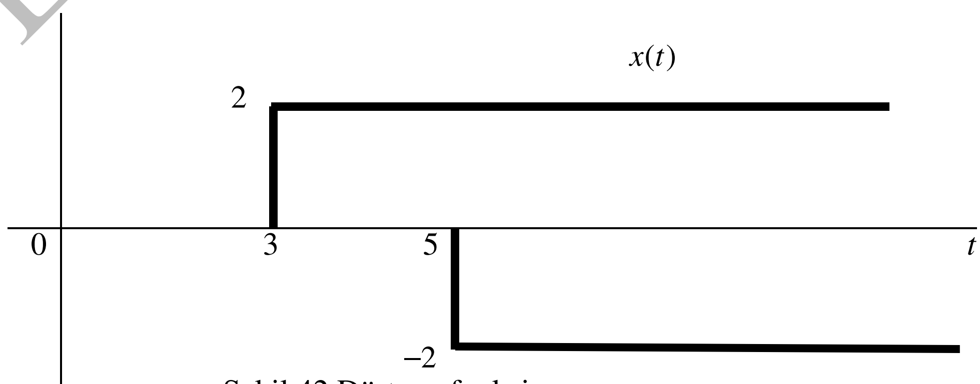
a) Birim basamak fonksiyonu karşılığını yazın.
b)Dörtgen fonksiyonu karşılığını yazın.
c) İmpuls fonksiyonu karşılığını yazın.



Şekil 41.Dörtgen fonksiyon

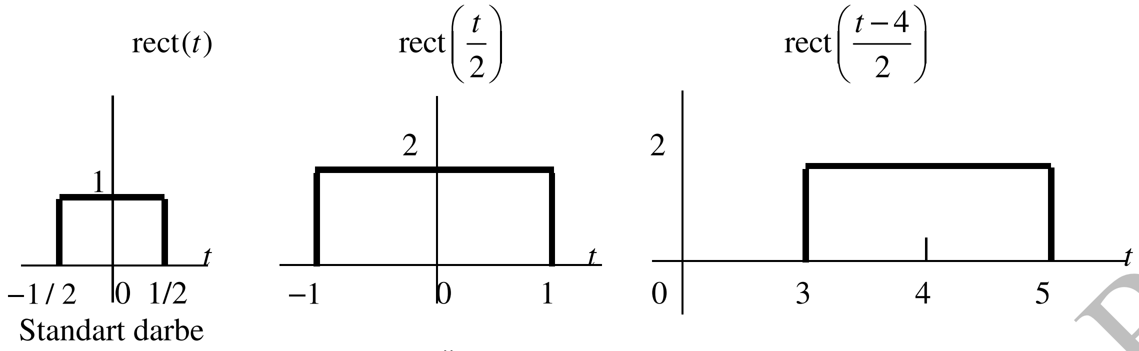
Çözüm

a) $x(t)=2u(t-3)-2u(t-5)$



Şekil 42.Dörtgen fonksiyon

b)



Şekil43. Ölçeklendirilmiş darbe işaretleri

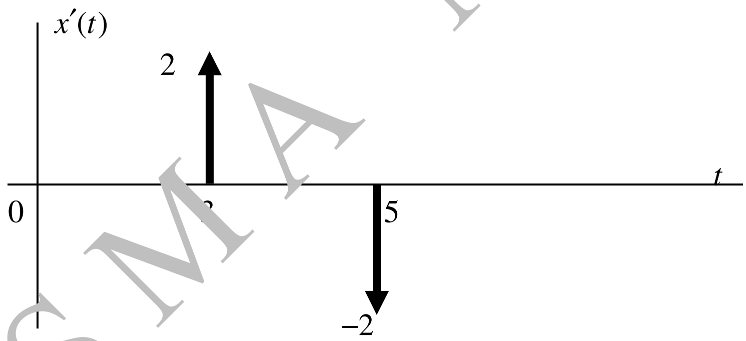
$$x(t) = 2u(t-3) - 2u(t-5) = 2\text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

Referans alınan standart $\text{rect}(t)$ darbesinin genişliği iki katına çıkarıldıktan sonra dört birim sağa öteleniyor.

c) Kural : $\dfrac{du}{dt} = \delta(t)$

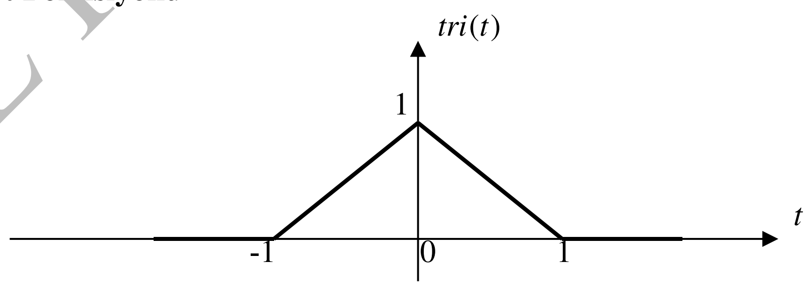
$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left[2u(t-3) - 2u(t-5)\right] = 2\frac{d}{dt}u(t-3) - 2\frac{d}{dt}u(t-5) = 2\delta(t-3) - 2\delta(t-5)$$

Sonuç : $\dfrac{d}{dt}2\text{rect}\left(\dfrac{t-4}{2}\right) = 2\delta(t-3) - 2\delta(t-5)$



Şekil 44. Dörtgen/Birim basamak fonksiyonun türevi

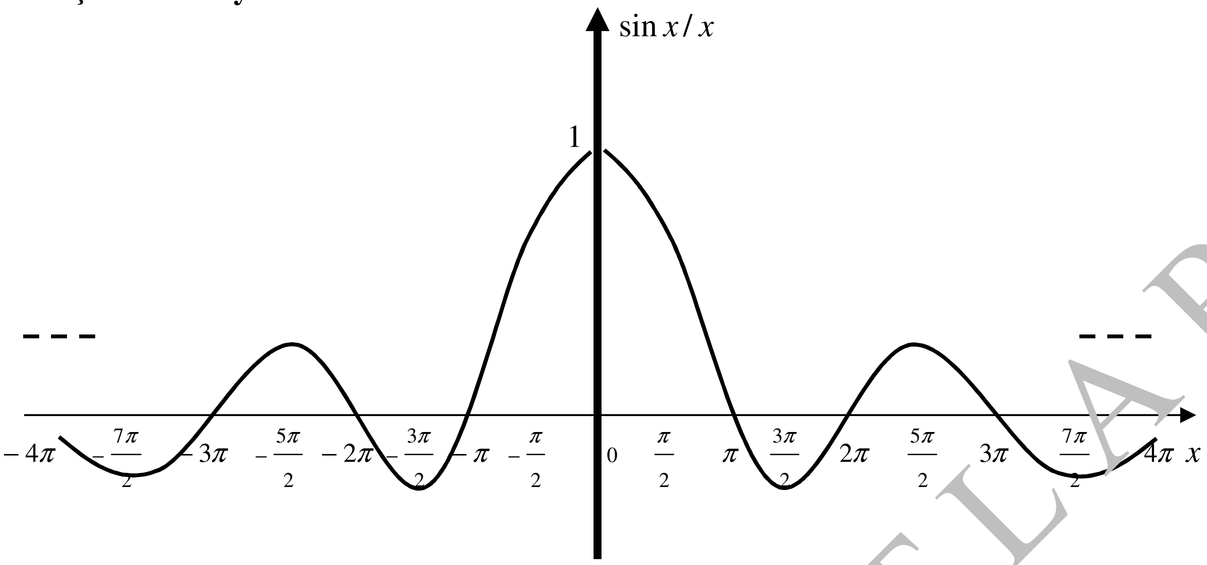
Üçgen İşaret Fonksiyonu



Şekil 45. Birim üçgen fonksiyonu

$$\text{tri}(t) = \Delta(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Sinc işaret fonksiyonu

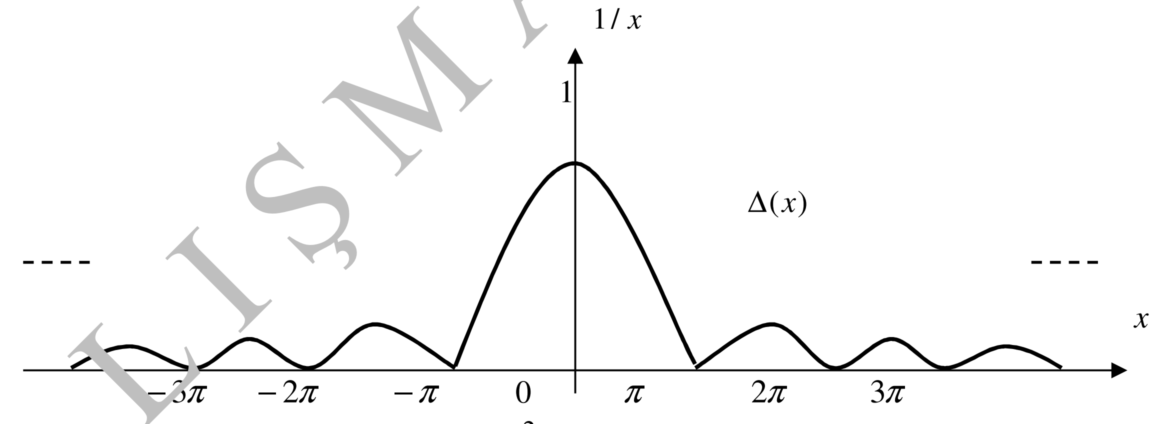


Şekil 46. $\mathrm{sinc}(x)$ işareti

$$\sin c(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = \pm\pi \ , \ \pm 2\pi \ , \ \pm 3\pi \ , \ \ldots \ , \ \pm k\pi \\ \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \quad \text{ve} \quad x \neq 1 \end{cases}$$

$\mathbf{sinc}^2$(x) Fonksiyonu



Şekil 47. $\mathrm{sinc}^2(x)$ gösterimi

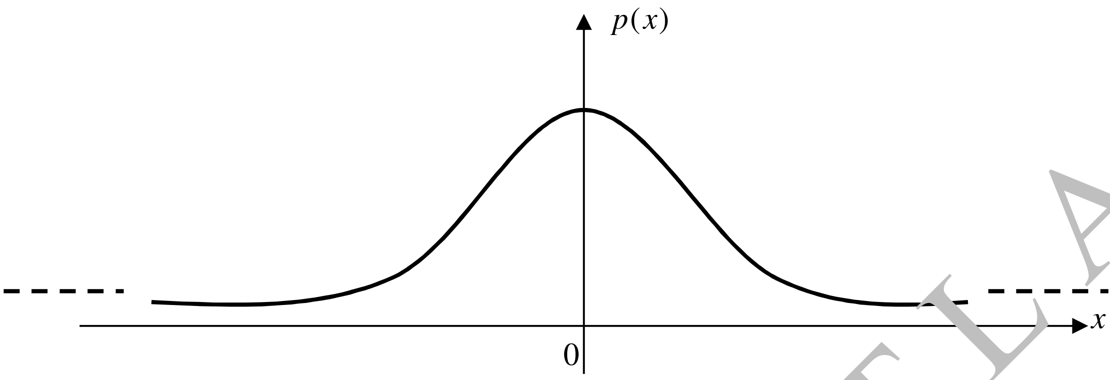
Zil (bell) Fonksiyonu

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Denklemdeki σ, standart sapma (normal fonksiyonun genişliğini ölçer) ve μ ortalamayı (aritmetik) göstermektedir. Ortalamanın sıfır ($\mu = 0$) ve standart sapmanın "1" ($\sigma = 1$) alınması durumundaki $p(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu, <u>*standart normal dağılım*</u> olarak anılır.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Bu özellikteki bell fonksiyonunun genel görünümü aşağıdaki gibidir.



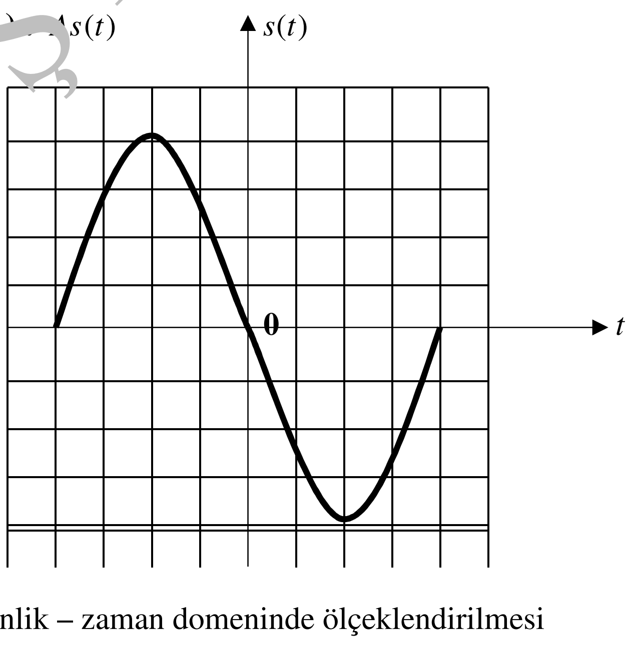
Şekil 48. Bell (Gaussian) fonksiyonu

İşaret Fonksiyonunun Parametreleri Üzerine İşlemler

$$y(t) = \mathbf{A}x(\frac{\mathbf{B}t}{\mathbf{C}} \mp \mathbf{D})$$

A : $x(t)$ işaret fonksiyounun genliğini (amplitude), şiddetini belirtir.
B : $x(t)$ işaret fonksiyounun frekansını, salınım sayısını artırır (sıkıştırma, compressing)
C : $x(t)$ işaret fonksiyonunun periyodunu artırarark, frekansını düşürür (yavaşlama, expanding)
D : $x(t)$ işaret fonksiyonunun t zaman ekseni üzerindeki ötelenme (kaydırma, shifting) miktarını belirtir. Bu işaretin " – " olması sağa doğru ötelenmeyi (gecikme, delay), " + " olması ise, sola doğru ötelenmeyi (önceki değerlere kaydırma, advance) gösterir.

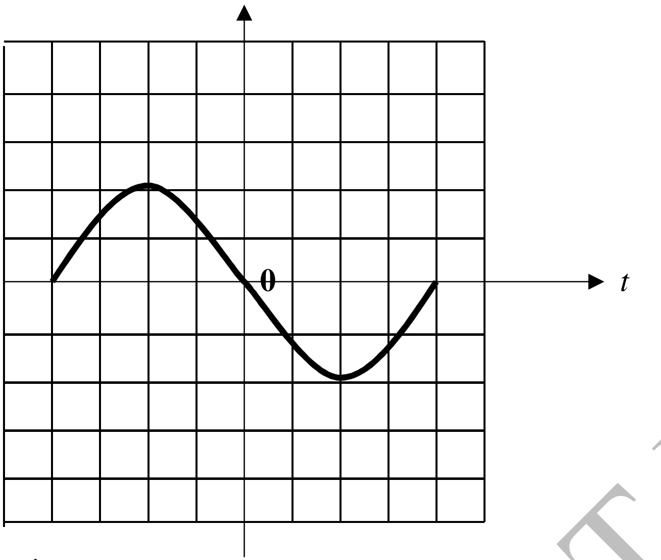
Genlik Ölçekleme (A) : $As(t)$



Şekil 49. İşaretin genlik – zaman domeninde ölçeklendirilmesi

Örnek

$s_m(t) = 0.5s(t)$

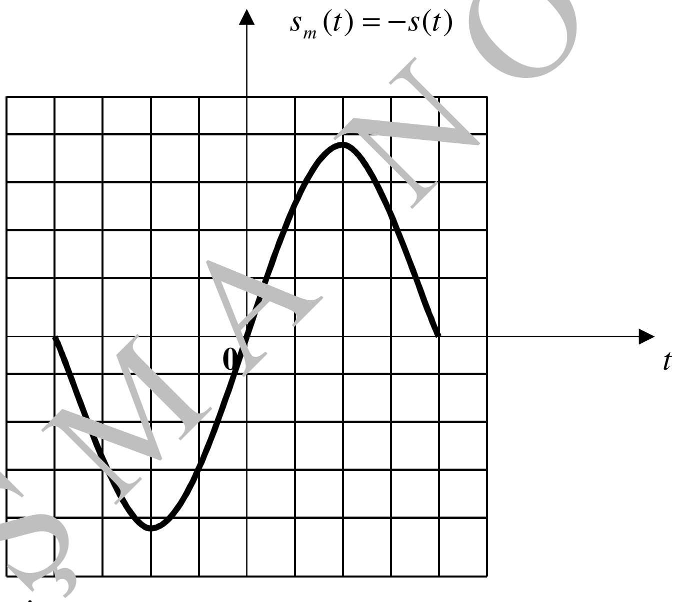


Şekil 50. İşaretin 1/2 ile çarpımı : genlikte ½ azalma

Örnek

$s_m(t) = -s(t)$

$s_m(t) = -s(t)$



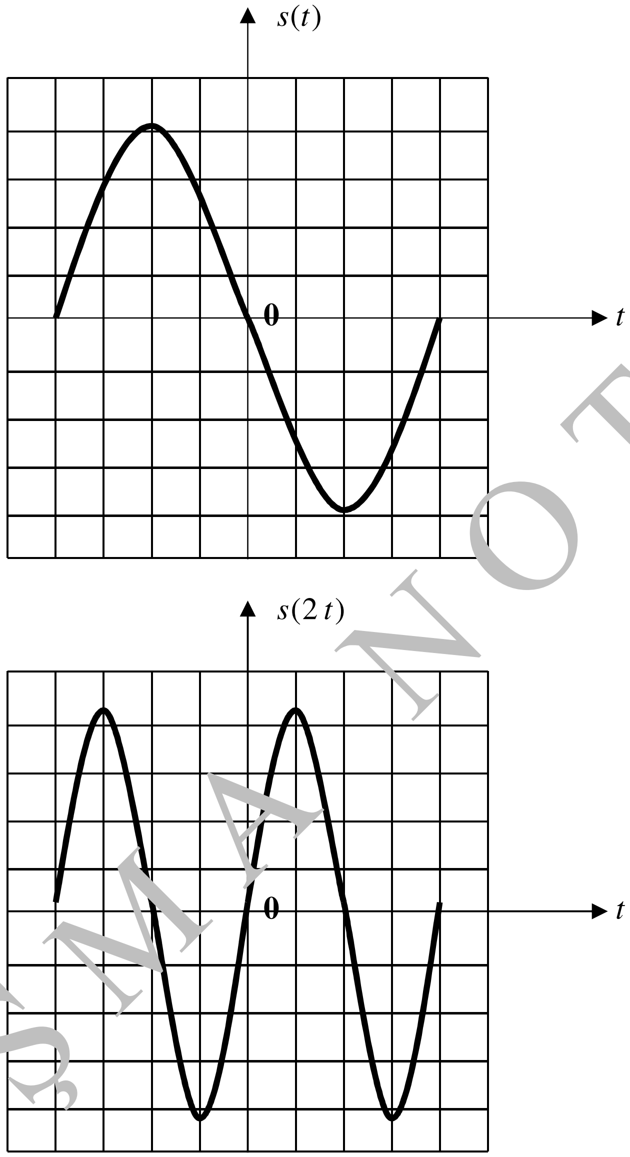
Şekil 51. İşaretin (-) ile çarpımı : işaretin terslenmesi

Frekans Ölçekleme (B)

$$t \rightarrow b\,t$$

Örnek

$s_m(t) = s(2t)$



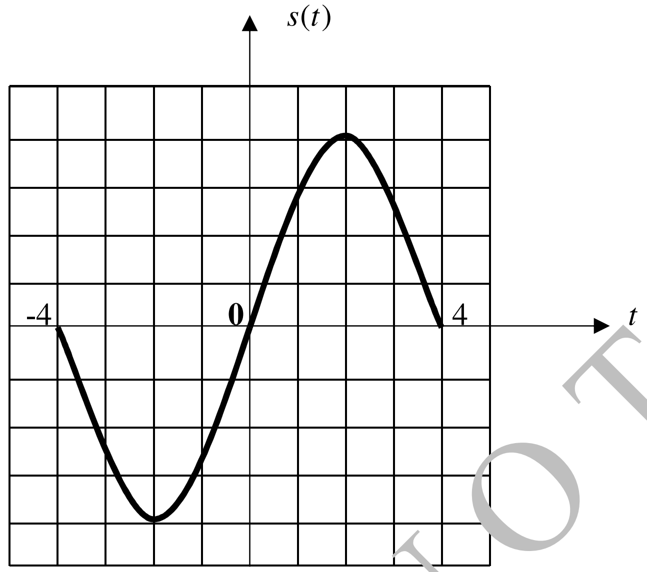
Şekil 52. İşaretin frekansının ölçeklendirilmesi

Periyod Ölçekleme (C)

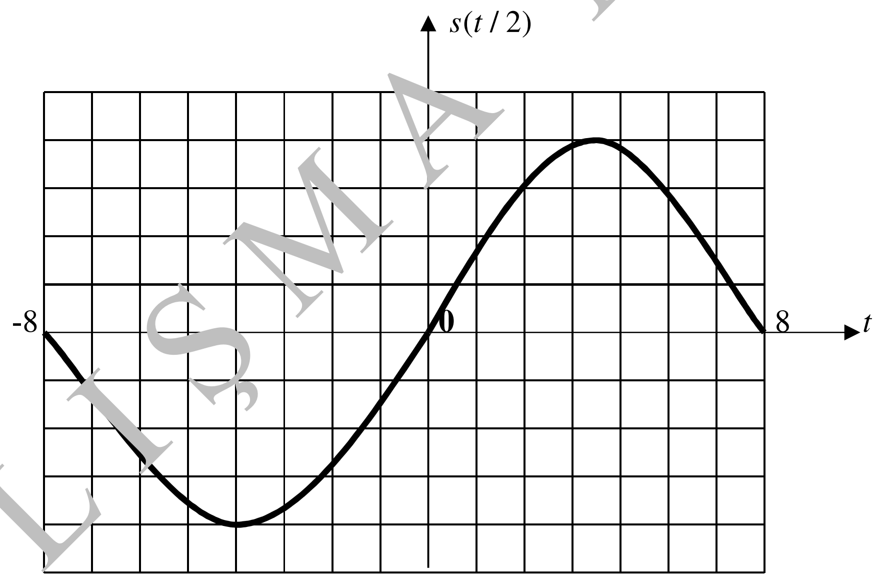
$$t \rightarrow \frac{t}{c}$$

Örnek

$s(t)$ işaretini aşağıdaki gibiyse, $s(t/2)$ işaretini elde edin.



Şekil 53. İşaretin zaman domeninde terslenmesi

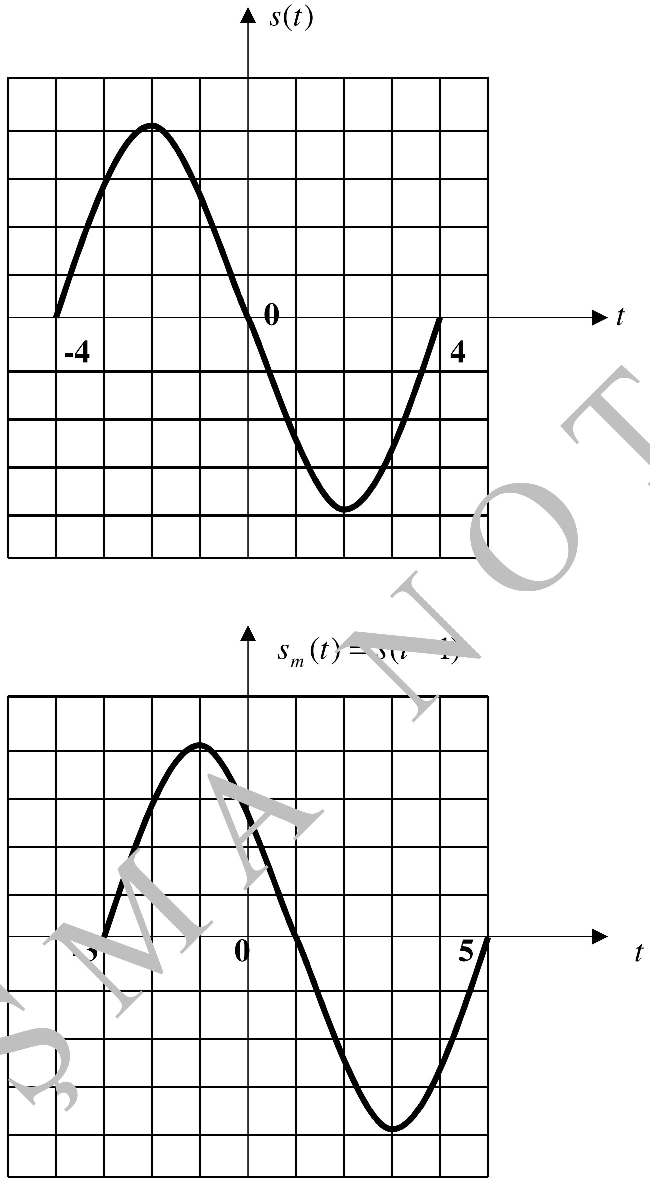


Şekil 54. İşaretin zaman domeninde terslenmesi ve ölçeklenmesi

İşaret Öteleme (D)

a) İleriye öteleme (-D)

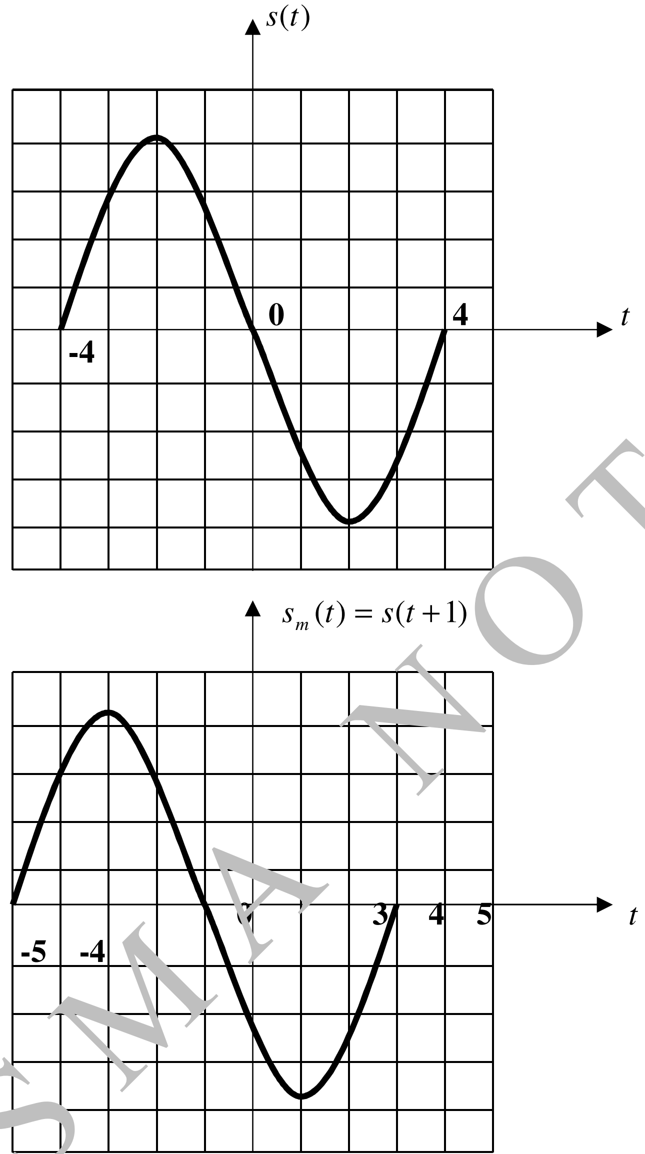
$s_m(t) = As(t-d)$



Şekil 55. $s(t)$ işaretinin $s(t-1)$ ötelenmesi

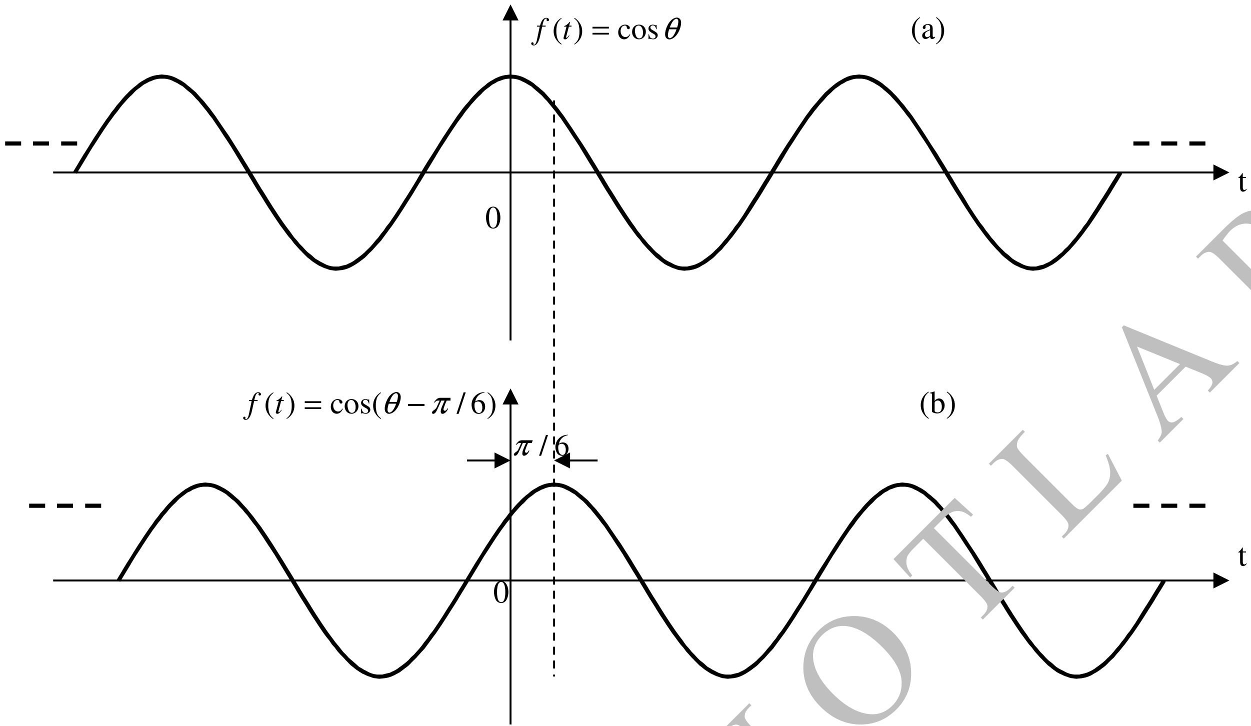
b) Geriye öteleme (+D)

$s_m(t) = As(t+d)$



Şekil 56. $s(t)$ ve ötelenmiş $s(t+1)$ işaretin gösterimi

Faz Kayması (phase shift)



Şekil 57.Faz kayması