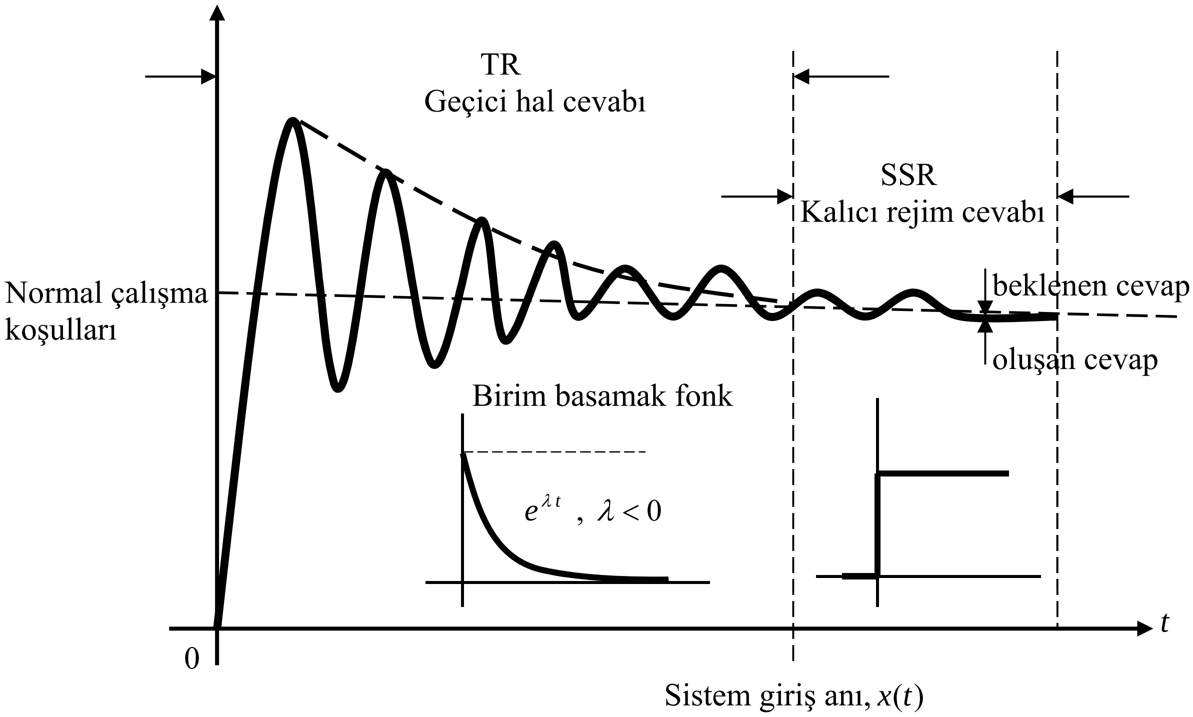
Öz Değerlerin Lineer Sistem Davranışının Belirlenmesine Etkisi



Şekil 257. Lineer sistemin geçici (transient) ve kalıcı (steady-state) cevapları

TR = Transient Response (geçici (hal) sistem cevabı)
SSR = Steady State Response (kalıcı (ha, resjiml) sistem cevabı)

Buna göre bir sistemin cevabını geçici ve kalıcı rejim durumlarındaki cevaplarının toplamı olarak düşünebiliriz.

$$\textbf{Toplam sistem cevabı} = \underbrace{\textbf{Geçici rejim cevabı}}_{\text{transient response}} + \underbrace{\textbf{Kalıcı rejim cevabı}}_{\text{steady state response}}$$

$$y_{TR}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} u(t) = \text{ geçici rejim cevabı}$$

Sistemin kararlı olması için ($e^{\lambda_i t} \underset{t \to \infty}{\to} 0$), öz değerlerin lineer kombinasyonundan oluşan bu sürecin sönümlü olması gerekmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi geçici hal cevabının ardından sistem sönümlü olduğu sürece kalıcı rejime ulaşacaktır ($y_{SSR}(t)$).

$$y_{SSR}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \text{ kalıcı rejim cevabı (harmanlama, konvulüsyon)}$$

Şekilden sistemin iki cevabı olduğu gözlemlenmektedir. Girişin yapılmadığı ilk durumda sistem enerji tutucu dinamikleriyle oluşturduğu enerjiyle geçici cevap oluşturmaktadır. Bu sürenin kararlı bir sistem adına girişin yapıldığı ana kadar sürmesi, ardından giriş ile kararlı moda erişmesi beklenir. Bu nedenle sistemin iç dinamikleriyle veya başlangıç koşullarıyla oluşturduğu bir cevap söz konusudur. Enerjili iken dönmekte olan motor milinin, enerji kesildikten sonra dönmesine bir süre daha devam etmesi başlangıcında belki de artık mıknatıslanma yoluyla biriktirdiği enerji, yani dinamizmi sayesinde mümkün olmaktadır. Veya kısa süreli aç-kapa yollu anahtarlamalarla da artık mıknatıslanma sağlanarak geçici cevaplar üretilebilir. Her durumda direkt girişler ile değil, enerji tutucu elemanların katkısıyla oluşan dinamiklerle geçici cevaplar mümkün olmaktadır. Önceden veya başlangıç koşullarına bağlı enerjiden kaynaklanması sebebiyle, ilgili cevaplar lineer diferansiyel denklemlerin çözümleriyle (homojen çözüm) sağlanmaktadır. Bunda diferansiyel denklemlerin bellek özellikleri etkendir.

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} \equiv \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \equiv \frac{y_2(t) - y_1(t)}{t_2 - t_1} \quad \text{Değişim, geçmiş, bellek, hafıza}$$

$v_C(t) =$ Kondansatör gerilimi $\qquad i_L(t) =$ Endüktans akımı

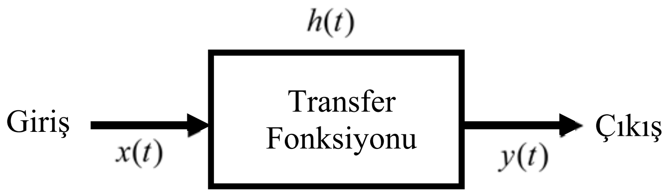
Sistemin ikinci cevabı, normal yollarla sisteme uygulanan klasik bir giriş ile oluşan cevaptır. Bu doğal bir süreçtir ve her sistemin bunu yerine getirmesi beklenir. Çünkü sonuçta bir sistem dışarıdan uygulanacak giriş ile beklenen performansını sergileyecektir. Bu cevap veya çıkış, doğal olarak sistemin daimi performansı anlamına gelen, kalıcı cevabı olarak adlandırılmaktadır.

Ancak ikinci cevap olarak dışarıdan giriş uygulandığında sistemin giriş öncesi evreyi/süreci neredeyse tekrarladığı şekilden görülmektedir ki, bu ilginç bir durumdur.

Sistemden beklenen giriş yapılan andan itibaren kararlı davranarak, beklenen performansı göstermesidir. Ancak şekilden de görüldüğü gibi sisteme giriş yapılsa bile önceki geçici cevabın bir şekilde tekrarlandığı görülmektedir. Yani sisteme giriş/etki/uyarı yapıldığı anda sistem önce varsa geçmişine dönerek enerjisinin yettiği kadar ki cevap/reaksiyon oluşturup, ardından girişin etkisinin söz konusu olacağı an ve sonrasını icra etmeye çalışmaktadır. Diğer bir deyişle sisteme her giriş yapıldığında sistemin adeta " geçmiş yaraları depreşmekte ", yani sistem her seferinde geçmişini hatırlamakta ve geçmişine dönmektedir. Bir anlamda sisteme her yapılan giriş, sistemin önce geçmişe gitmesine neden olmaktadır. Sisteme geçmişi hatırlama/yad etme işlemini bellek özelliğindeki hafıza elemanlarıyla yapmaktadır. Bu açıdan sistemin temsil edildiği diferansiyel denklemler, hatta integratörler iyi birer hafıza kaynağıdırlar. Yani türev alıcı veya integral alıcı bir sistem bellekli ve de nedensel özelliklidir. Bu nedenle sistemlerin diferansiyel denklemlerle gösterimleri ve çözüm – analizleri rahatlıkla yapılabilmektedir.

Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerin Geçmiş (Hafıza) Özelliği

Girişi $x(t)$ ve çıkışı $y(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin " kara kutu (black box) " görünümü aşağıdaki gibidir.



Şekil. Sistem

Böyle bir sistemi temsil edebilecek en mükemmel yaklaşım veya model, aşağıda verilen lineer zamandan bağımsız bir diferansiyel denklem sistemi ile mümkün olabilir.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Sistem gösterimi için lineer diferansiyel denklem sisteminin niçin en iyi yol olduğu, hafıza özelliği ile açıklanabilir. Bunun için örneğin ilk olarak $y(t)$ çıkışını göz önüne alalım.

$$0.\ y(t) \qquad 1.\ \frac{dy(t)}{dt} \qquad 2.\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \qquad 3.\ \frac{d^3 y(t)}{dt^3} \quad \text{-------} \quad n.\ \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

$$\longrightarrow$$

Geçmişten – geleceğe

Görüldüğü gibi $y(t)$ 'nin her bir türevi bir sonraki adımı, yani geleceği oluşturmaktadır. Diğer bir deyişle n.dereceli bir türev/diferansiyel aslında $n - 1$ tane geçmiş olduğuna işarettir. Eğer n.dereceli bir diferansiyel sistem mevcutsa, bunun anlamı önceden, yani başlangıcından itibaren $n - 1$ tane durumun/değişimin varlığı da göz önüne alınmalıdır. Bu nedenledir ki, diferansiyel denklemlerin çözümü için daima başlangıç koşulları aranır ve gereklidir. Diğer bir deyişle sistemi olduğu an itibariyle değil, eğer sahipse geçmiş yani önceki zamanlardaki koşullarıyla da (başlangıç koşulları) değerlendirmek daha gerçekçi bir yaklaşım olacaktır. Bu nedenle bazen cebirsel çözümler için kolaylık olsun diye başlangıç koşullarının sıfır alınması mümkün olsa da, gerçekte bu tutarlı bir yaklaşım olmaz. Sistemin tutarlı davranışı yalnızca girişin uygulandığı an itibariyle değil, bunun öncesine, yani geçmişine dayanan başlangıç koşullarıyla (dinamik, geçici) belirlenen cevabıyla birlikte dikkate alınmalıdır. Sistemin başlangıç, yani geçmişe yönelik geçici/dinamik cevabını hesaplamak için mevcut diferansiyel denklem sisteminde giriş sıfır alınmalıdır, $x(t) = 0$. Bu durumda genel diferansiyel denklemin giriş tarafını gösteren eşitliğin sağ tarafı tamamen/komple sıfır olacağından,

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad \text{Giriş yok, geçmiş/geçici çözüm}$$

Bunun anlamı, sisteme giriş yapılmadığında, diğer bir deyişle sistem girişi sıfır , $x(t) = 0$ olduğundaki sistemin cevabının söz konusu olmasudur. Sisteme giriş yapılmaksızın sistemin cevap oluşturmasını artık **yadırgamamaktayız**. Biliyoruz ki bu, sistemin önceki yani başlangıç koşullarına dayalı iç dinamikleriyle mümkün olmakta, hatta kısa, yani geçici bir süreçtir. Bu durumda sistemim çıkışının diferansiyellerinden oluşan denklemin sıfıra eşitlenerek çözümünde, aslında yukarıda gösterilen her bir diferansiyel operatörün bir geçmiş, yani bellek/hafıza alanı oluşturması yatmaktadır. Bu nedenle sağ tarafın sıfır alınmasıyla geçmişe yönelik araştırılan çözüme, **homojen çözüm** denilmektedir.